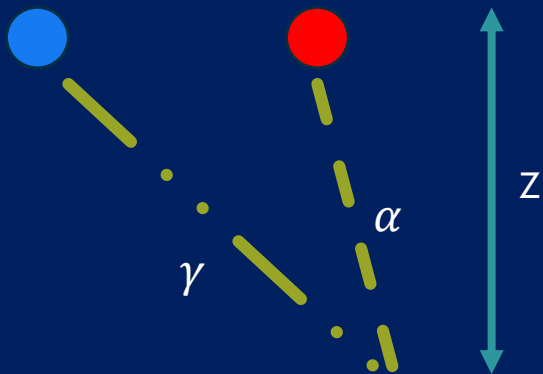


TERMODINAMICA

Una partícula con una temperatura 6 grados inferior a la del ambiente desciende espontáneamente por vía adiabática seca en una atmósfera de gradiente térmico vertical $\alpha = -0,65^\circ\text{C}/100\text{ m}$. Determinar el descenso de la partícula suponiendo que se para justo en el momento en el que las temperaturas se igualan:

- a) 180 m
- b) 1,7 km
- c) 2,3 km
- d) 923 m

$$\text{Gradiente adiabático seco: } \gamma = -\frac{g}{c_p} = -\frac{0,98^\circ\text{C}}{100\text{ m}} \approx -\frac{1^\circ\text{C}}{100\text{ m}}$$

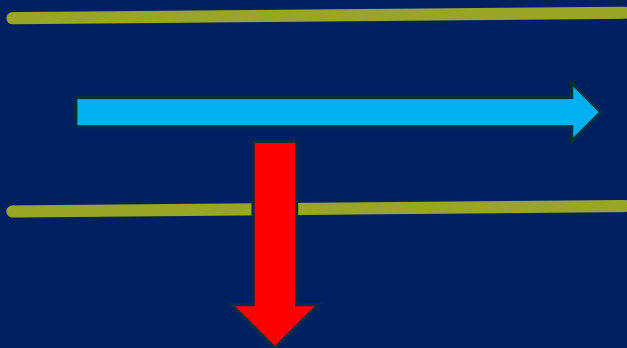


$$6 + \gamma z = \alpha z$$

$$z = \frac{6}{(\alpha - \gamma)} = \frac{6}{(0,35/100)} = 1714\text{ m}$$

Calcular la fuerza de Coriolis en Jacksonville, Florida (EEUU) (coordenadas 30°N 81° W), suponiendo un viento de componente oeste de 10 m/s:

- a) $73 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ dirigida hacia el sur
- b) 10^{-4} m s^{-2} dirigida hacia el sur
- c) $73 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$ dirigida hacia el sur
- d) $73 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ dirigida hacia el norte.



$$F_c = 2 \Omega v \sin\phi = 2 \frac{2 * 3,14}{86400} * 10 * 2 * \frac{1}{2} = 73 * 10^{-5}$$

Determinar el espesor entre la superficie isobara de 1000 hPa y la de 360 hPa, considerando una temperatura virtual media del estrato de -13 °C:

Dato: $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

- a) 7426 mgp
- b) 7208 mgp
- c) 6746 mgp
- d) 7614 mgp

$$dp = -\rho g dz$$

$$dz = -\frac{1}{\rho g} dp$$

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$dz = -\frac{1}{\rho g} dp = -\frac{RT_{vm}}{g} dp$$

$$z = \frac{RT_{vm}}{g} \ln \frac{1000}{360} = \frac{287 \times 260}{9,8} \times 1 = 7614 \text{ mgp}$$

Calcular el módulo del viento geostrófico en un lugar teniendo en cuenta que la presión aumenta 10 hPa en una distancia horizontal de 500 km:

Datos: (densidad $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$; parámetro de Coriolis $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$)

- a) 2 m/s
- b) 15 m/s
- c) 20 m/s
- d) 25 m/s

$$V_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n}$$

$$|V_g| = \frac{1}{1 \times 10^{-4}} \frac{1000}{500 \times 10^3} = 20$$

Calcular la temperatura de color del Sol de acuerdo a la ley de desplazamiento de Wien, considerando que la intensidad máxima de emisión del sol corresponde a una longitud de onda de $0,47 \mu\text{m}$ y que la constante de Wien es $a = 0.0028 \text{ m K}$

- a) 6105 K
- b) 5957 K
- c) 6212 K
- d) 6100 °C

$$\lambda_{max} T = \alpha$$

$$T = \frac{\alpha}{\lambda_{max}} = \frac{0,0028}{0,47 \times 10^{-6}} = 5957$$

Al efectuar un balance entre la energía recibida por la superficie terrestre y la emitida por ésta, sin considerar la atmósfera, y considerando una constante solar de 1361 W/m² y un albedo y emisividad terrestre de 0.3 y 1 respectivamente, la temperatura superficial terrestre sería del orden de:

(Dato: Constante de Stefan-Boltzman: 5.67 x 10⁻⁸ W m⁻² K⁻⁴)

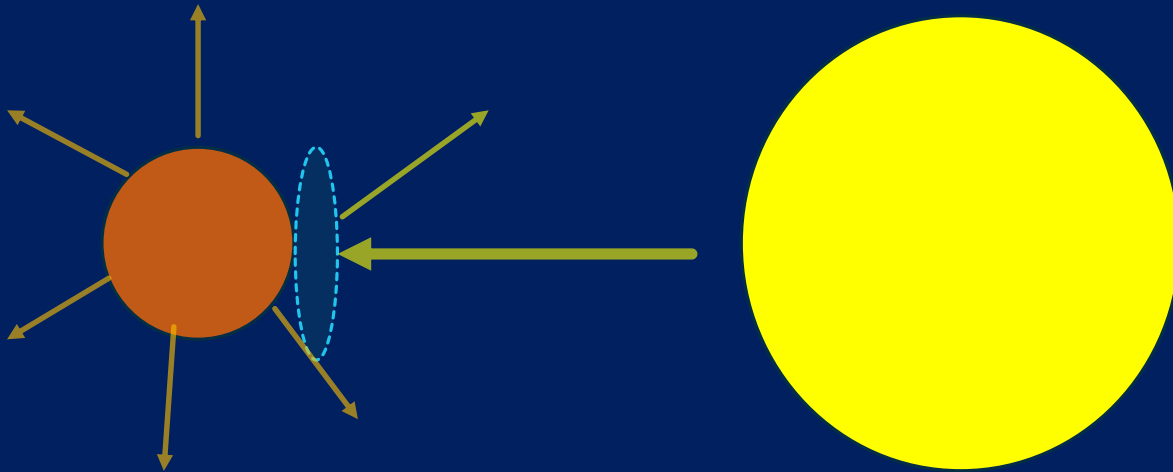
- a) - 30 °C
- b) 15 °C
- c) - 19 °C
- d) 18 °C

$$\varepsilon 4\pi R^2 \sigma T^4 = S \pi R^2$$

$$4 \sigma T^4 = (1-\varepsilon) S$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{0,7 \times 1361}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}}}$$

$$T = 2,55 \times 10^2 \text{ K} = -18 \text{ C}$$



TERMODINÁMICA DE LA ATMÓSFERA

Gas ideal

$$p_d = \rho_d R_d T$$

$$R_d = 287 \frac{J}{kgK}$$

Primer principio de la termodinámica

$$dq = dU + dW$$

$$dW = p dV$$

$$c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v=cte} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{v=cte}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{p=cte}$$

$$dq = c_v dT + p dV$$

$$pV = RT$$

$$pdV + vdp = R dT$$

$$c_p = c_v + R$$

$$dq = c_v dT + p dV$$

$$dq = c_p dT - v dp$$

Tabla I
CONSTANTES METEOROLOGICAS

Masa molecular media del aire seco	$M = 28,9644 \text{ g/mol}$
Masa molecular del agua	$M' = 18,016 \text{ g/mol}$
Calor específico a presión constante del aire seco	$c_p = 0,2405 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
Calor específico a volumen constante del aire seco	$c_v = 0,1719 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
Calor específico a presión constante del vapor de agua	$c'_p = 0,444 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
Constante universal de los gases referida al aire seco	$R = 0,0685 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
	$R = 286,8 \text{ J/kg} \cdot \text{grad}$
Constante universal de los gases referida al vapor de agua ...	$R' = 0,1102 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
	$R' = 461 \text{ J/kg} \cdot \text{grad}$
Calor latente de vaporización del agua a 0° C	$L_v = 597,3 \text{ cal/g}$
Calor latente de fusión del agua a 0° C	$L_f = 79,63 \text{ cal/g}$
Calor latente de sublimación a 0° C	$L_s = 675 \text{ cal/g}$

Tabla II
CONSTANTES GEOFISICAS

Radio de la Tierra (Ecuatorial)	$R_e = 6,37839 \times 10^6 \text{ m}$
Radio de la Tierra (polar)	$R_p = 6,35691 \times 10^6 \text{ m}$
Area de la Tierra	$A_t = 5,101 \times 10^{17} \text{ m}^2$
Volumen de la Tierra	$V_T = 1,083 \times 10^{22} \text{ m}^3$
Aceleración de la gravedad en el Ecuador	$g_E = 9,78049 \text{ m/s}^2$
Aceleración de la gravedad a 45° de latitud	$g_{45^\circ} = 9,80629 \text{ m/s}^2$
Aceleración de la gravedad al nivel del mar en función de la latitud	$g_\varphi = g_E (1 + 0,000052884 \text{ sen}^2 \varphi - 0,000000059 \text{ sen}^2 2\varphi) \text{ m/s}^2$
Velocidad angular de la Tierra	$\omega = 7,2921159 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
Distancia media de la Tierra al Sol	$D = 149,5 \times 10^6 \text{ km}$
Velocidad media de la Tierra en su órbita alrededor del Sol	$v_T = 29,8 \text{ km/s}$

Si la presión al nivel del mar es de 1013,2 hPa, y la temperatura de 15°C. ¿Cuál es la densidad del aire seco?. ¿Qué volumen ocupa 1 kg de aire seco?.

$$p_d = \rho_d R_d T$$

$$\rho_d = \frac{p_d}{R_d T} =$$

$$\frac{1013,2 \cdot 10^2 \text{ Pa}}{287,05 \frac{\text{J}}{\text{K kg}} (15 + 273) \text{ K}} = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$v = \frac{m}{\rho} =$$

$$\frac{1 \text{ kg}}{1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0,816 \text{ m}^3$$

1. LA ATMOSFERA EN EQUILIBRIO: ECUACIONES FUNDAMENTALES

La condición necesaria para que la atmósfera esté en equilibrio es que todas sus partículas permanezcan en reposo con relación a la Tierra. Por tanto, su velocidad relativa será cero ($v_r=0$) y la ecuación vectorial del movimiento, que es:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\bar{\Omega} \times \bar{v} - g\bar{k} + \bar{F}$$

queda simplificada en la forma:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\bar{k} = 0 \quad [1-1]$$

ya que los términos correspondientes a la aceleración de Coriolis y a las fuerzas de fricción son nulos, debido a que al ser función de la velocidad se anulan con ésta, al igual que la aceleración relativa, que es igualmente cero por la hipótesis de partida.

La ecuación 1-1 puede ponerse en la forma escalar:

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad [1-2]$$

Esta ecuación es básica en la estática de fluidos y se denomina *ecuación fundamental de la hidrostática*, que puede adoptar la forma más conocida:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz \quad [1-3]$$

Por otra parte, sabemos que g varía, aunque poco, con la altura y la latitud, lo que hace necesario la introducción del concepto de geopotencial.

La diferencia de potencial gravitatorio entre un punto cualquiera de la atmósfera y el nivel medio del mar, se denomina *geopotencial absoluto* y se designa por Φ .

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de los gases perfectos podremos poner:

$$dp = -\rho d\Phi \quad dp = -\frac{P}{RT} d\Phi \quad [2-2]$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT} d\Phi$$

Ahora bien, dado que ρ es función de p , T y z , es imprescindible introducir en todas las ecuaciones de la estática atmosférica la temperatura virtual (se define la T_v de una masa de aire húmedo como la temperatura del aire seco que, a la misma presión, tenga la misma densidad). La expresión de la misma, que se demostrará en otro capítulo, es:

$$T_v = \left(1 + \frac{3}{5}q\right)T$$

o bien,

$$T_v \approx T \left[1 + \frac{3e}{8p}\right]$$

En la atmósfera real, la ecuación 2-2 no puede integrarse fácilmente, ya que la distribución vertical de la temperatura no obedece a una ley sencilla. Por tanto, resulta necesario introducir algunas aproximaciones, como, por ejemplo, aplicar el teorema de la media, pudiendo entonces escribir:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{RT_m} \int_0^\Phi d\Phi = -\frac{\Phi}{RT_m} \quad [2-3]$$

Resultando una ecuación igual a la de una atmósfera isoterma, y que no puede darnos una ley de presiones en función de Φ , al ser T_m función de Φ y de $\Delta\Phi$, por lo que esta ecuación 2-3 sólo puede aplicarse a estratos sucesivos.

Por las restricciones anteriores, la ecuación 2-3 adopta la forma logarítmica

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{1}{RT_m} (\Phi_2 - \Phi_1) \quad [2-4]$$

y la forma exponencial:

$$p_2 = p_1 \exp \left[-\frac{1}{RT_m} (\Phi_2 - \Phi_1) \right] \quad [2-5]$$

La temperatura (T_m) se denomina temperatura media barométrica, por lo que a partir de aquí la designaremos por T_{mb} , y representa la temperatura de un estrato isoterma del mismo espesor geopotencial que el del estrato real y que además contiene idéntica masa de aire.

Analíticamente se puede expresar por la ecuación:

$$\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{T_{mb}} = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{d\Phi}{T} \quad [2-6]$$

Las ecuaciones finitas de equilibrio estático vienen expresadas por:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = RT_{mb} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad [2-7]$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp \left(-\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R T_{mb}} \right) \quad [2-8]$$

La ecuación 2-7 nos permite calcular el espesor en m. geopotenciales entre los niveles superior e inferior de un estrato conociendo las presiones respectivas.

La ecuación 2-8 permite el cálculo de la presión en una de las capas del estrato conociendo el valor de la presión en la otra capa y el espesor del estrato.

Para estratos de pequeño espesor, y haciendo $g \approx cte$, las ecuaciones 2-7 y 2-8 pueden adoptar la forma aproximada:

$$z_2 - z_1 = \frac{RT_{mb}}{g} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad [2-7]'$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp \left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{R T_{mb}} \right] \quad [2-8]'$$

3. ALTIMETRIA: CALCULO DE GEOPOTENCIALES

a) Geopotencial absoluto

Veremos a continuación algunas expresiones que permiten el cálculo de alturas en m. geopotenciales (m.g.p.) y aclararemos algunos conceptos:

Hemos indicado que el geopotencial absoluto es el potencial de la fuerza de gravedad, medido desde el nivel medio del mar ($z=0$). La expresión del geopotencial viene determinado por la ecuación:

$$\Phi = H = \frac{1}{A_0} \int_0^z g \cdot dz$$

A_0 es una constante que depende de las unidades usadas en el cálculo del geopotencial.

Para altitudes pequeñas, $g \approx cte$. y tenemos:

$$\Phi = H = \frac{g}{A_0} z$$

Si g viene en ($m s^{-2}$) y z en (m) tendremos las unidades siguientes:

$A_0 = 10 \Rightarrow H$ viene en m. dinámicos.

$A_0 = 9,8 \Rightarrow H$ viene en m. geopotenciales.

La altura de una superficie isobárica medida en m. geopotenciales (m.g.p.) coincide, pues, con el geopotencial absoluto. Este geopotencial absoluto (Φ_g o bien H) se calcula fácilmente por la ecuación:

$$\Phi_g = H = \frac{R}{9,8} \bar{T}_v \ln \frac{p_0}{p_z} \quad \left\{ \begin{array}{l} R = 286,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \\ T_v = \left(1 + \frac{3}{5}q\right) T \\ \bar{T}_v = \text{Temperatura virtual media del estrato.} \end{array} \right.$$

Luego:

$$H = 29,3 \bar{T} \left(1 + \frac{3}{5}q\right) \ln \frac{p_0}{p_H} \quad [3-1]$$

El incremento del geopotencial absoluto H como un resultado de los cambios finitos:

$$\begin{array}{l} P_0 \rightarrow P_0 + \delta P_0 \\ \bar{T}_v \rightarrow \bar{T}_v + \delta \bar{T}_v \end{array}$$

se determina fácilmente, diferenciando la ecuación 3-1:

$$\delta H = \frac{R}{9,8} \delta \bar{T}_v \ln \frac{P_0}{p} + \frac{R}{9,8} \bar{T}_v \frac{\delta P_0}{P_0}$$

b) Geopotencial relativo

En Meteorología se denomina espesor de una capa entre dos superficies isobáricas a la diferencia de sus *geopotenciales absolutos*, luego:

$$H_r = \frac{R}{9,8} \bar{T}_v \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Ecuación del espesor o geopotencial relativo:

P_1 → presión nivel inferior
 P_2 → presión nivel superior
 Luego: $P_1 > P_2$.

El incremento del espesor, geopotencial relativo, por una variación finita de la temperatura ($\delta \bar{T}_v$) viene dado por la ecuación aproximada:

$$\delta H_r = \frac{R}{9,8} \delta \bar{T}_v \ln \frac{P_1}{P_2}$$

4. ALGUNOS EJEMPLOS DE ATMOSFERAS ESTATICAS

Acabamos de ver en la ecuación hidrostática cómo la presión cambia respecto a la altura en función de la densidad del aire. Para que sea posible su integración, es necesario conocer exactamente las funciones de la densidad, o de la temperatura, con respecto a la presión.

Las distintas soluciones de la ecuación diferencial hidrostática son llamadas en Meteorología fórmulas barométricas. Estas fórmulas barométricas cambiarán de unas a otras según sean las funciones que establezcan la variación de ρ o de T con z . Para su resolución se introducen algunos modelos de atmósferas simples, como las siguientes:

a) Atmósfera homogénea (densidad constante)

En este caso:

$$\rho = \rho_0 = \text{cte} \quad [4-1]$$

Luego, la ecuación hidrostática:

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dz$$

se integra inmediatamente, y resulta:

$$P_z = P_0 - g \cdot \rho_0 \cdot z \quad [4-2]$$

Para obtener la variación de la temperatura con la altura operamos:

De la ecuación de estado $p_v = RT$:

$$p dv + v dp = R dT$$

en este caso,

$$\rho = \rho_0 = \text{cte}; \quad v_0 dp = R \cdot dT \Rightarrow dp = \rho_0 R dT$$

Comparando esta ecuación con la hidrostática:

$$(dp = -\rho_0 \cdot g \cdot dz)$$

queda:

$$\rho_0 R dT = -\rho_0 g dz$$

y resulta:

$$dT = \frac{-g}{R} dz$$

que se integra inmediatamente:

$$T(z) = T_0 - \frac{g}{R} \cdot z; \quad [4-3]$$

$$\text{siendo } T_0 = \frac{P_0}{R\rho_0}$$

Finalmente, el gradiente térmico vertical de una atmósfera homogénea se determina en la ecuación:

$$dT = -\frac{g}{R} dz \Rightarrow \gamma = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{R} \quad [4-4]$$

donde:

$$R = 0,0685 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} = 0,0685 \times 1.000 \times 4,18 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} = 286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1}$$

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

luego:

$$\gamma = 3,42 \text{ grad/100 m}$$

b) Atmósfera isoterma

Impone la condición:

$$T = T_0 = \text{cte} \quad [4-5]$$

Para obtener las ecuaciones de ρ y p en función de z operamos como sigue:

$$\text{Ecuación hidrostática} \Rightarrow dp = -\rho g dz \quad (a)$$

$$\text{Ecuación de estado} \Rightarrow dp = RT_0 d\rho \quad (b) \text{ (por ser } T = T_0 = \text{cte)}$$

Igualando los dos segundos miembros de (a) y (b) queda:

$$RT_0 d\rho = -\rho g dz \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{R T_0} dz \quad (c)$$

Integrando (c)

$$\left[\ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{g \cdot z}{R T_0} \right] \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{gz}{R T_0} \right] \quad [4-6]$$

Teniendo en cuenta:

$$p = \rho \cdot R \cdot T_0 \Rightarrow \ln p = \ln \rho + \ln R + \ln T_0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

Luego:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g \cdot dz}{R T_0} \Rightarrow p = p_0 \exp \left[-\frac{gz}{R T_0} \right] \quad [4-7]$$

La atmósfera isoterma tiene una extensión infinita, ya que:

$$P \Rightarrow 0 \quad \text{para} \quad z \rightarrow \infty$$

Resulta evidente que su gradiente térmico vertical es cero:

$$\gamma_T = -\frac{\partial T_0}{\partial z} = 0$$

c) Atmósfera politrópica

En este modelo, la condición impuesta es que T varía linealmente con la altura según la ecuación:

$$T = T_0 - \gamma_p \cdot z \quad [4-8]$$

siendo:

$$\gamma_p = -\frac{\partial T}{\partial z} = \text{cte} \quad [4-9]$$

De las ecuaciones hidrostática y de estado

$$(dp = -\rho g dz); \quad \left(\rho = \frac{p}{RT} \right)$$

resulta:

$$dp = -\frac{gp}{RT} dz$$

o bien:

$$\left[\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R T} dz \right] \quad (a)$$

De la ecuación 4-9

$$\Rightarrow \left[dz = -\frac{dT}{\gamma_p} \right] \quad (b)$$

Sustituyendo en (a):

$$\left[\frac{dp}{p} = \frac{g}{R\gamma_p} \frac{dT}{T} \right] (c) \Rightarrow$$

integrando:

$$\left[\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R\gamma_p} \ln \frac{T}{T_0} \right] (d)$$

Y en forma exponencial

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p} = \left(\frac{T_0 - \gamma_p z}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p} = \left(\frac{1 - \gamma_p z}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p}$$

Luego:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma_p z}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p} \quad [4-10]$$

Esta ecuación constituye la fórmula barométrica para la atmósfera politrópica. Para obtener la densidad, operamos:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p_0}{RT} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p}$$

multiplicando y dividiendo por T_0 resulta:

$$\rho = \frac{p_0}{RT_0} \frac{\left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p}}{\left(\frac{T}{T_0} \right)} = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/R\gamma_p - 1} \quad [4-11]$$

o bien

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma_p z}{T_0} \right]^{g/R\gamma_p - 1} \quad [4-12]$$

En esta atmósfera el gradiente térmico vertical lo obtenemos a partir de las expresiones:

$$\delta Q = cdT = c_p dT - v dp$$

Es decir:

$$(c_p - c)dT = v dp$$

luego:

$$(c_p - c)dT = v(-\rho g dz)$$

y por tanto:

$$\gamma_p = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p - c}$$

d) Atmósfera adiabática

Se trata de un caso particular de la politrópica, pero dada la gran importancia de las evoluciones adiabáticas en Meteorología veremos algunas relaciones aquí, aunque serán tratadas más ampliamente en los capítulos de Termodinámica.

Podemos definir a este modelo de atmósfera como aquél que mantiene su temperatura potencial constante, verificando además la condición de las atmósferas politrópicas, en las que la temperatura varía linealmente con la altura. Luego:

$$T = T_0 - \gamma_a z \quad ; \quad \gamma_a = \text{gradiente adiabático}$$

y además:

$$\theta = \theta_0 = \text{cte (temperatura potencial cte.)} \quad [4-13]$$

(La temperatura potencial es un importantísimo parámetro en Meteorología y se verá ampliamente en Termodinámica.) La temperatura potencial viene definida por la expresión

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p} \Rightarrow \ln \theta = \ln T - \frac{R}{C_p} \ln p + \frac{R}{C_p} \ln p_0$$

Derivando la ecuación logarítmica, respecto a z , resultará:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{C_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

ya que $\theta = \text{cte}$.

Resultando:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{RT}{p} \frac{1}{C_p} \frac{\partial p}{\partial z} \right]$$

Ahora bien, según la ecuación hidrostática,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Luego:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{RT}{p} \frac{1}{C_p} \rho \cdot g = -\frac{g}{C_p} \Rightarrow \gamma_a = -\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{C_p} \approx 1 \text{ grad}/100 \text{ m} \quad [4-14]$$

por lo que se demuestra que la atmósfera adiabática resulta ser un caso particular de la atmósfera politrópica y, por tanto, se pueden utilizar todas las ecuaciones deducidas para esta última operando con el valor del gradiente adiabático γ_a .

e) Atmósfera real (la temperatura cambia arbitrariamente con la altura)

Tenemos $T = T(z)$, función desconocida en general. La ecuación hidrostática:

$$[dp = -\rho g dz] \quad \text{y como} \quad \rho = \frac{p}{RT} \quad [4-15]$$

resulta:

$$dp = -\frac{p}{RT} g dz \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T(z)} \quad [4-16]$$

Para poder integrar la ecuación 4-16 debemos introducir el concepto de *temperatura media barométrica*, que sólo sirve para estratos finitos, y que resulta tanto más exacta cuanto menor sea el espesor del estrato considerado.

Luego:

$$T_{mb} = \frac{Z}{\int_0^z \frac{dz}{T(z)}} \Rightarrow \int_0^z \frac{dz}{T(z)} = \frac{z}{T_{mb}} \quad (a)$$

Mediante este artificio la ecuación 4-16 puede integrarse, y resulta:

$$\left[\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T(z)} = -\frac{g}{R} \cdot \frac{z}{T_{mb}} \right] \Rightarrow P = P_0 \cdot \exp\left(-\frac{g \cdot z}{R T_{mb}}\right) \quad (b)$$

Para encontrar la expresión analítica de la densidad utilizamos la ecuación de estado de los gases perfectos, introduciendo también el concepto de T_{mb} :

$$P = \rho R T_{mb}$$

resultará una atmósfera isoterma, luego:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

o bien:

$$\ln \frac{P}{P_0} = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (c)$$

y comparando las ecuaciones (c) y (b) resulta:

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{g}{R T_{mb}} z$$

y finalmente:

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{gz}{R T_{mb}}\right) \quad [4-17]$$

Resaltamos aquí la analogía, entre las ecuaciones 4-16 y 4-17 de esta atmósfera real con las ecuaciones correspondientes de la atmósfera isoterma 4-6 y 4-7.

f) Atmósfera estándar o tipo O.A.C.I.

En Aeronáutica se utiliza un modelo de atmósfera muy simple en la que la relación entre el geopotencial, la temperatura y la presión está definida de acuerdo a unas hipótesis básicas, que son:

- 1.ª La atmósfera está formada por aire seco, con una composición molecular media constante ($M = 28,9644 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$).
- 2.ª La presión a nivel del mar es:

$$P_0 = 1013,25 \text{ mb}$$

- 3.ª La temperatura a nivel del mar es:

$$T_0 = 288,15 \text{ K}$$

- 4.ª La densidad a nivel del mar es:

$$\rho_0 = 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

- 5.ª El aire cumple la ley de los gases perfectos, y su constante es:

$$R = 286,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ grad}^{-1}$$

- 6.ª El gradiente térmico vertical en la Troposfera es constante e igual a:

$$\gamma = 0,65 \text{ grad}/100 \text{ m}$$

- 7.ª La altitud de la Tropopausa es de 11.000 m.g.p.; su temperatura, $T_{\text{trop}} = 216,65 \text{ K}$, y su presión $P_{\text{trop}} = 226,32 \text{ mb}$.

- 8.ª La estratosfera está definida entre los niveles de 11.000 y 20.000 m.g.p., con una temperatura constante e igual a $T = 216,65 \text{ K}$ (luego $\gamma_s = 0$).

9.º Finalmente, de 20.000 mgp a 32.000 mgp el gradiente es negativo, y constante e igual a $\gamma_s = -0,1$ grad/100 m. Las temperaturas y presiones en la base y tope de esta tercera capa de la atmósfera estándar son:

Para

$$Z = 20.000 \text{ mgp} \begin{cases} P = 54,75 \text{ mb} \\ T = 216,65 \text{ K} \end{cases}$$

Para

$$Z = 32.000 \text{ mgp} \begin{cases} P = 8,68 \text{ mb} \\ T = 228,65 \text{ K} \end{cases}$$

5. ALTIMETRIA AERONAUTICA

La anterior atmósfera tipo se ha ido ampliando progresivamente hasta los 300 km de altitud, para uso de cohetes, como atmósfera teórica. No obstante, la navegación comercial tiene suficiente techo con los límites establecidos aquí.

La necesidad de utilizar en aviación un reglaje uniforme para los altímetros es lo que impulsó el establecimiento general de la atmósfera estándar.

Unido a esta atmósfera teórica hay una serie de definiciones que conviene repasar, ya que están íntimamente relacionadas con ella.

En primer lugar tenemos:

Altura. Es la distancia vertical entre un nivel, punto u objeto y una referencia especificada.

Altitud. Distancia vertical entre un nivel, punto u objeto y el nivel del mar.

Elevación. Distancia vertical entre un punto o nivel de la superficie de la Tierra y el nivel medio del mar.

Como los altímetros son barómetros aneroides que indican la altitud o altura en función de la presión, pero no de la temperatura, se introdujeron en la altimetría aeronáutica algunas definiciones complementarias para corregir este defecto.

a) Altitud de presión y altitud de densidad

La altitud de presión se denomina en Aeronáutica *nivel de vuelo* y se define: «Un nivel de vuelo es una superficie de presión constante relacionada con una determinada referencia de presión constante e igual a 1.013,2 mb».

Los niveles de vuelo así definidos están separados entre sí por espesores de 500 pies hasta los 28.500 pies, y de 1.000 pies a partir de 29.000 pies, medidos en la atmósfera estándar.

El nivel de vuelo, o altitud de presión, es una altitud basada en la atmósfera estándar con independencia de la temperatura real; cuando la altitud de presión se corrige con la temperatura real, distinta de la de la atmósfera estándar, se obtiene la

altitud de densidad. Luego:

$$\frac{p_0}{p} = \exp \left[-\frac{gz_s}{R T_{ms}} \right] \quad \text{para la atmósfera estándar}$$

$$\frac{p_0}{p} = \exp \left[-\frac{gz_r}{R T_{mr}} \right] \quad \text{para la atmósfera real}$$

y como las presiones son iguales resulta:

$$\frac{Z_s}{T_{ms}} = \frac{Z_r}{T_{mr}} \Rightarrow \frac{Z_r}{Z_s} = \frac{T_{mr}}{T_{ms}}$$

luego:

$$\frac{Z_r - Z_s}{Z_s} = \frac{T_{mr} - T_{ms}}{T_{ms}}$$

Finalmente:

$$Z_r = Z_s + Z_s \frac{T_{mr} - T_{ms}}{T_{ms}}$$

Hay que reseñar, además, que debido al reglaje del altímetro según la atmósfera estándar resulta evidente que:

1) Cuando un avión vuela en una zona cuya presión o temperatura real es inferior a la de la atmósfera estándar, el vuelo se realiza a menor altitud que la indicada en el altímetro.

2) Cuando las condiciones reales de presión y temperatura son superiores a las de la atmósfera estándar, el vuelo se realiza a mayor altitud que la indicada por el altímetro.

b) Reglaje del altímetro

El reglaje o calado de un altímetro se realiza sobre distintas referencias, que pasamos a describir:

QFE. Es la presión existente al nivel del aeródromo de referencia. Se utiliza sólo en las aproximaciones y aterrizajes.

QNH. Es el valor de la presión cuando el altímetro marca la altitud topográfica del aeródromo. El *QNH* es imprescindible para el vuelo y el aterrizaje.

Hemos indicado anteriormente que los niveles de vuelo son superficies de presión constante cuya altitud varía al cambiar la presión. Cuando el *QNH* del lugar que sobrevuela el avión coincide con 1.013,2 mb, el nivel de vuelo cero coincide con el nivel del mar y los sucesivos niveles de vuelo estarán en las altitudes verdaderas, correspondientes a su número de nivel, es decir, el nivel 10, estará a 1.000 pies, el 15 a 1.500 pies, el 20 a 20.000 pies, etc.; pero si el *QNH* aumenta, también sufrirán un

aumento las altitudes de los niveles de vuelo, y al disminuir el *QNH* disminuyen las altitudes de los niveles de vuelo.

Como los aviones deben volar a una altitud mínima exigida en el vuelo, el piloto deberá estar atento a los *QNH* de las estaciones que sobrevuela a lo largo de su ruta, de forma que si desciende de su altitud de seguridad (por descenso de los *QNH*) deberá cambiar de nivel de vuelo asegurándose de estar por encima de esa altitud de seguridad obligatoria.

QNE. Todos los aviones en ruta deben llevar su altímetro reglado con la presión de 1.013,2 mb, en cuyo caso su lectura nos dará el nivel de vuelo.

En tierra se determina con un altímetro situado en la pista de aterrizaje y reglado a 1.013,2 mb, cuya lectura nos dará el *QNE*.

c) Operaciones de aproximación y despegue

Finalmente, en las operaciones de aproximación se definen algunas altitudes aeronáuticas:

Hemos visto que las aeronaves vuelan en superficies de presión constante, es decir, en niveles de vuelo con ajuste de altímetro sobre el *QNE*, pero tanto en la aproximación como en el ascenso deben ajustar el altímetro en *QNH* para que las altitudes sean más aproximadas a la realidad. Este problema de ajuste de altímetro se resuelve fijando una altitud de transición, una capa de transición y un nivel de transición, que se definen de la siguiente forma:

Altitud de transición: es la altitud en la proximidad de un aeropuerto en la cual, o por debajo de la cual, el altímetro debe calibrarse respecto al *QNH*.

Capa de transición: sirve para cambiar el reglaje del altímetro de la referencia *QNE* a *QNH* o viceversa (espesor de 1.000 pies).

Nivel de transición: es el nivel de vuelo más bajo que puede usarse por encima de la altitud de transición. Como el nivel de vuelo viene medido por el altímetro sobre el *QNE*, este nivel nos indica cuándo debemos calibrarlo sobre el *QNH*.

Demostrar que una atmósfera homogénea (densidad independiente de la altura) posee una altura finita que depende únicamente de la temperatura en el límite inferior. Calcular la altura de una atmósfera homogénea con una temperatura en superficie de 273 K y presión en superficie de 100 kPa.

$$dp = -\rho g dz$$

$$dz = -\frac{1}{\rho g} dp$$

$$\text{Para } T_{sup} = 273 \text{ K}$$

$$z_{max} = \frac{R'T_{sup}}{g} = \frac{287 \times 273}{9,8} = 7995 \text{ m}$$

$$\int_0^{z_{max}} dz = -\frac{1}{\rho g} \int_{p_{sup}}^0 dp$$

$$z_{max} = \frac{p_{sup}}{\rho g} = \frac{\rho R'T_{sup}}{\rho g} = \frac{R'T_{sup}}{g}$$

Calcular el espesor de la capa entre las isóbaras de 985 mb y 700 mb, si la temperatura media de la columna es de 20°C.

$$\Delta z = \frac{R' T_m}{g} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{287,05 \frac{J}{K \text{ kg}} (20 + 273,16)K}{9,8 \frac{m}{s^2}} \ln\left(\frac{985}{700}\right) = 2932,95 \text{ m}$$

¿Cuál es el espesor de la capa entre los niveles de presión de 1000 y 900 milibares si las temperaturas a esos niveles son, respectivamente, 13 y 2 C, suponiendo que la temperatura varía linealmente con la altura dentro de la capa y que el aire es seco.

$$\Delta z = \frac{R' T_m}{g} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{287,05 \frac{J}{K \text{ kg}} \left(\frac{275 + 285}{2}\right) K}{9,8 \frac{m}{s^2}} \ln\left(\frac{1000}{900}\right) = 864,11 \text{ m}$$

Suponiendo la atmósfera homogénea, con una presión de 1.013 mb y una temperatura de 288 K en la superficie de la Tierra, calcular las presiones existentes a las alturas de 1, 3, 5, 7, 9 km, así como la altura de esta atmósfera.

$$P = P_0 - \frac{P_0}{RT_0} gZ = P_0 \left(1 - \frac{gZ}{RT_0} \right)$$

Luego:

$$P = 1.013 \text{ mb} \left(1 - \frac{9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{286,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot 288 \text{ K}} \cdot Z \right)$$

sustituyendo z por los valores indicados en el problema resulta:

Z(m)	1.000	3.000	5.000	7.000	9.000
P(mb)	893	652	412	172	0

La presión se anula entre 7.000 y 9.000 m.

$$P = P_0 \left(1 - \frac{gZ}{RT_0} \right)$$

$$P = 0 \text{ resulta } 1 - \frac{gz}{RT_0} = 0$$

$$Z = \frac{RT_0}{g} = \frac{286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \cdot 288 \text{ K}}{9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \underline{\underline{8.428 \text{ m}}}$$

Calcular: a) la fórmula barométrica $p = p(z)$; b) la variación de T con la altura $T = T(z)$; y c) el gradiente térmico vertical $\gamma = -\frac{dT}{dz}$.

Para el caso de una atmósfera homogénea (modelo de atmósfera en la que: $\rho = \rho_0 = \text{cte}$).

$$\rho = \rho_0 = \text{cte}$$

Luego la ecuación hidrostática se integra inmediatamente y resulta:

$$dp = -\rho_0 g dz \Rightarrow \underline{p = p_0 - \rho_0 g z}$$

b) De la ecuación de estado:

$$p dv + v dp = R dT$$

Pero al ser $\rho = \text{cte} \Rightarrow dv = 0$, luego $v dp = R dT$ y, por tanto, $dp = \rho_0 R dT$. Comparando esta ecuación con la hidrostática:

$$dp = -\rho_0 g dz$$

resulta:

$$-\rho_0 g dz = \rho_0 R dT$$

es decir:

$$dT = -\frac{g}{R} dz$$

que se integra inmediatamente:

$$\underline{T = T_0 - \frac{g}{R} dz},$$

$$\text{siendo } T_0 = \frac{p_0}{R \rho_0}$$

c) Finalmente, el gradiente térmico vertical de una atmósfera homogénea se determina de la ecuación anterior $dT = -\frac{g}{R} dz$, es decir:

$$\gamma = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{R}$$

donde

$$R = 286,8 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \text{ grad}^{-1}$$

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

luego

$$\gamma = \frac{9,8}{286,8} = \underline{3,42 \text{ grad/100 m}}$$

El estrato comprendido entre las superficies isobáricas de 900 y 700 mb tiene una temperatura media de 0° C y una proporción de mezcla media de 4 g vapor/kg aire seco. Calcular el espesor de esta capa.

$$\bar{T}_v = \bar{T} \left(1 + \frac{3}{5} q \right) \approx \bar{T} \left(1 + \frac{3}{5} m \right)$$

$$\bar{T}_v \approx 273 \text{ K} \left(1 + \frac{3}{5} \times 4 \times 10^{-3} \right) = 273,7 \text{ K}$$

$$P = P_0 \exp \left[- \frac{gz}{R\bar{T}_v} \right]$$

$$Z = - \frac{R\bar{T}_v}{g} \ln \frac{P}{P_0}$$

$$Z = - \frac{286,8 \times 273,7}{9,8} \ln \frac{700}{900} = \underline{\underline{2.013 \text{ mgp}}}$$

Suponiendo una atmósfera isoterma con una presión de 1.103 mb en el suelo, calcular las alturas a las que se encuentran las superficies de 500, 300 y 100 mb, sabiendo que si la misma atmósfera fuese homogénea su tope sería 7.900 m.

Si la atmósfera fuese *homogénea* tendríamos:

$$P = P_0 - \rho_0 g z \Rightarrow P = P_0 - \frac{P_0}{RT_0} g z \Rightarrow 0 = P_0 \left(1 - \frac{gZ_H}{RT_0} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{gZ_H}{RT_0} \quad H = \frac{RT_0}{g} = 7.900 \text{ m}$$

Como la atmósfera es *isoterma*, tenemos:

$$Z = \frac{RT_0}{g} \ln \frac{P_0}{P} = 7.900 \ln \frac{P_0}{P}$$

a) Para:

$$P_0 = 1.013 \text{ mb y } P = 500 \text{ mb}$$

la expresión anterior da:

$$Z = 7.900 \ln \frac{1.103}{500} = \underline{5.578 \text{ m}}$$

b) Para:

$$P_0 = 1.013 \text{ mb y } p = 300 \text{ mb}$$

Resulta:

$$Z = 7.900 \ln \frac{1.013}{300} = \underline{9.613 \text{ m}}$$

c) Para:

$$p_0 = 1.013 \text{ mb y } p = 100 \text{ mb}$$

$$z = 7.900 \ln \frac{1.013}{100} = \underline{18.293 \text{ m}}$$

Una atmósfera politrópica con un gradiente de 0,5 grad/100 m tiene una presión y temperatura de 1.013 mb y 288 K a nivel del mar. Calcular la presión a 1,2 y 5 km de altitud.

Sabemos que:

$$T = T_0 - \gamma Z$$

Luego:

Donde:

$$\gamma = \text{cte} = -\frac{dT}{dz} \Rightarrow dz = -\frac{dT}{\gamma}$$

$$\text{Para 1 km: } p_1 = p_0 \left(1 - \frac{\gamma Z}{T_0}\right)^{g/R\gamma} = 1.013 \left(1 - \frac{0,5 \times 1.000}{288}\right)^{\frac{9,8}{286,8} \times \frac{0,5}{100}} = \underline{899 \text{ mb}}$$

Por otra parte:

$$dp = -\rho g dz = -\frac{p g}{RT} dz = \frac{p g dT}{R\gamma T}$$

$$\text{Para 2 km: } p_2 = 1.013 \left(1 - \frac{0,5 \times 2.000}{288}\right)^{\frac{9,8}{286,8} \times \frac{0,5}{100}} = \underline{796 \text{ mb}}$$

es decir:

$$\frac{dp}{p} = \frac{g}{R\gamma} \frac{dT}{T}$$

$$\text{Para 5 km: } p_5 = 1.013 \left(1 - \frac{0,5 \times 5.000}{288}\right)^{\frac{9,8}{286,8} \times \frac{0,5}{100}} = \underline{545 \text{ mb}}$$

e integrando:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/R\gamma} = \left(1 - \frac{\gamma Z}{T_0}\right)^{g/R\gamma}$$

Suponiendo la atmósfera estándar calcular la presión y temperatura a 15.000 m de altura. Datos: $p_0 = 1.013$ mb; $T_0 = 288$ K; $\gamma = 0,65$ grad/100 m.

Nótese que en la atmósfera estándar la estratosfera comienza a 11.000 m, luego de 11.000 a 15.000 m la atmósfera se supone isoterma, es decir, $\gamma = 0$ grad/100 m. En consecuencia:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R} \cdot \gamma}$$

$$T = T_0 - \gamma z$$

Para 11.000 m resultará:

$$p_{11} = 1.013 \left(1 - \frac{0,65 \times 11.000}{100 \times 288} \right)^{\frac{9,8 \times 100}{0,65 \times 286,8}} = \underline{226 \text{ mb}}$$

$$T_{11} = 288 - \frac{0,65}{100} \times 11.000 = 216,5 \text{ K}$$

Para 15.000 m tendremos:

$$P_{15} = p_{11} e^{-\frac{g z}{R T}}$$

$$T_{15} = T_{11}$$

Es decir:

$$p_{15} = 226 e^{-\frac{9,8 \times 4.000}{286,8 \times 216,5}} = \underline{120,2 \text{ mb}}$$

y

$$\underline{T_{15} = 216,5 \text{ K}}$$

Suponiendo una atmósfera politrópica con una presión en superficie de 1.020 mb y una temperatura de 20 C, determinar la altura de la superficie de presión de 700 y 300 mb y calcular además la altura total de esta atmósfera, suponiéndole un gradiente de 1,2 grad/100 m.

La fórmula barométrica es:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma Z}{T_0} \right)^{g/R\gamma}$$

Despejando z, resulta:

$$z = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}} \right]$$

Luego para 700 mb resulta:

$$z_{700} = \frac{293 \text{ K}}{1,2 \text{ grad}/100 \text{ m}} \left[1 - \left(\frac{700}{1.020} \right)^{\frac{286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \cdot 1,2 \text{ grad}/100 \text{ m}}{9,8 \text{ m s}^{-2}}} \right] = \underline{3.024 \text{ m}}$$

Análogamente:

$$z_{300} = \underline{8.530 \text{ m}}$$

Finalmente, la altura de esta atmósfera será:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right)^{g/R\gamma} = 0$$

Luego:

$$1 - \frac{\gamma z}{T_0} = 0$$

y, por tanto:

$$z = \frac{T_0}{\gamma} = \frac{293 \text{ K}}{1,2 \text{ grad}/100 \text{ m}} = \underline{24.416 \text{ m}}$$

Calcular el espesor de un escalón barométrico unitario para los siguientes casos, correspondientes todos ellos a aire seco:

- a) Presión 1.000 mb y temperatura 288 K.
- b) Presión 500 mb y temperatura 253 K.
- c) Presión 200 mb y temperatura 213 K.

Sabemos que:

$$dp = -\rho g dz \Rightarrow \Delta p \simeq \rho g \Delta z$$

Por tanto:

$$\Delta z = \frac{1}{\rho g} \Delta p = \frac{RT}{pg} \Delta p$$

Con lo que para $\Delta p = 1$ mb.

$$a) \quad \Delta z = \frac{286,8 \times 288}{1.000 \times 9,8} \times 1 = \underline{8,43 \text{ m}} \text{gp}$$

$$b) \quad \Delta z = \frac{286,8 \times 253}{500 \times 9,8} \times 1 = \underline{14,8 \text{ m}} \text{gp}$$

$$c) \quad \Delta z = \frac{286,8 \times 213}{200 \times 9,8} = \underline{31,17 \text{ m}} \text{gp}$$

Un avión en vuelo registra los siguientes datos:

p (mb)	989	955	898
t ($^{\circ}$ C)	20,9	19,5	16,2
q ($g \cdot kg^{-1}$)	8,4	6,8	6,2

Sabiendo que en superficie ($Z=0$) se tiene:

$$p = 1.008 \text{ mb}; \quad t = 21,9^{\circ} \text{ C}; \quad q = 9,6 \text{ g} \cdot \text{kg}^{-1}$$

calcular las alturas de los niveles de presión:

- Usando la fórmula politrópica.
- Usando la fórmula general.

Calculamos en primer lugar las correspondientes temperaturas virtuales para poder aplicar las fórmulas barométricas, utilizando la expresión: $T_v = T \left(1 + \frac{3}{5} q \right)$, con lo que podemos elaborar el siguiente cuadro:

p (mb)	1.008	989	955	898
T_v (K)	296,6	295,5	294,5	290,3
q ($g \cdot kg^{-1}$)	9,6	8,4	6,8	6,2

a) Fórmula politrópica:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/R\gamma}$$

$$T = T_0 - \gamma z$$

$$\gamma_1 = \frac{g}{R} \frac{\ln \frac{T_{v1}}{T_0}}{\ln \frac{p_1}{p_0}} = 6,67 \times 10^{-3} \text{ grad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$z_1 = \frac{T_0 - T_1}{\gamma_1} = \frac{1,1}{6,67 \times 10^{-3}} = \underline{165 \text{ m}}$$

Idénticamente:

$$\gamma_2 = \frac{g}{R} \frac{\ln \frac{T_{v2}}{T_{v1}}}{\ln \frac{p_2}{p_1}} = \frac{9,8}{286,8} \frac{\ln \frac{294,5}{295,5}}{\ln \frac{955}{988}} = 3,41 \text{ grad}/1.000 \text{ m}$$

$$z_{1-2} = \frac{T_{v1} - T_{v2}}{\gamma_2} = \frac{1,0}{3,41 \times 10^{-3}} = 293,3 \text{ m}$$

luego:

$$z_2 = 165 + 293 = \underline{458 \text{ m}}$$

y lo mismo:

$$\gamma_3 = \frac{g}{R} \frac{\ln \frac{T_{v3}}{T_{v2}}}{\ln \frac{p_3}{p_2}} = 7,98 \times 10^{-3} \text{ grad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$z_{2-3} = \frac{T_{v2} - T_{v3}}{\gamma_3} = 526,6 \text{ m}$$

con lo que:

$$z_3 = 458 + 527 = \underline{985 \text{ m}}$$

b) Usando la fórmula general:

La expresión analítica es:

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g \cdot z}{R \cdot T_{mb}}}$$

luego

$$z = \frac{RT_{mb}}{g} \ln \frac{p}{p_0}$$

Si hacemos la aproximación

$T_{mb} \simeq T_m$ aritmética, resulta:

$$T_{m1} = 296,1 \text{ K} \Rightarrow z_1 = \underline{168 \text{ m}}$$

$$T_{m2} = 295,1 \text{ K} \Rightarrow z_{1-2} = 302 \text{ m} \Rightarrow z_2 = \underline{470 \text{ m}}$$

$$T_{m3} = 292,4 \text{ K} \Rightarrow z_{2-3} = 527 \text{ m} \Rightarrow z_3 = \underline{997 \text{ m}}$$

Calcular la masa total de la atmósfera, suponiendo que en la superficie de la Tierra la presión es igual a 1.000 mb y la temperatura es 15° C. Suponer la atmósfera homogénea. El radio de la Tierra es igual a $6,4 \times 10^6$ m.

a) En principio podríamos utilizar la segunda ley de Newton, considerando el peso de la atmósfera como la fuerza que da lugar a la presión en la superficie de la Tierra al actuar sobre la totalidad de ella. En efecto:

$$Mg = pS = p4\pi R_T^2,$$

de donde:

$$M = \frac{p4\pi R_T^2}{g}$$

Utilizando unidades del SI:

$$p = 1.000 \text{ mb} = 1.000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

resulta:

$$M = \frac{10^5 \times 4\pi(6,4 \times 10^6)^2}{9,8} = \underline{5,252 \times 10^{18} \text{ kg}}$$

b) Otra manera de resolver el problema, suponiendo una atmósfera homogénea, será:

$$p_z = p_0 - \rho_0 g z$$

y la altura correspondiente a $p_z = 0$ será:

$$p_0 = \rho_0 g z \rightarrow z = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{p_0}{RT_0} g = \frac{RT_0}{g} = 8.428 \text{ m}$$

Lo que representa un volumen de la atmósfera:

$$V_A = \frac{3}{4}\pi(R_A^3 - R_T^3) = \frac{4}{3}\pi[(6.408 \cdot 428)^3 - (6.400.000)^3] = 4,3396 \times 10^{18} \text{ m}^3$$

con lo que:

$$M_A = \rho_0 V_A = \frac{\rho_0}{RT_0} \cdot V_A = \frac{10^5 \text{ Nm}^{-2}}{286,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \cdot 288 \text{ grad}} \cdot 4,3396 \times 10^{18} \text{ m}^3 = \underline{5,2538 \cdot 10^{18} \text{ kg}}$$

Calcular el gradiente horizontal de la temperatura media en el estrato comprendido entre el suelo y la altura de 3 km, sabiendo que el valor de ésta es 260 K, las presiones de las capas inferior ($Z = 0$) y superior ($Z = 3$ km) son respectivamente 1.000 mb y 700 mb, y sus gradientes respectivos son 1 mb/100 km y 3 mb/100 km y tienen igual dirección y sentido.

Como los gradientes horizontales de la presión tienen igual dirección y sentido, también lo tiene el gradiente horizontal de la T_m :

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{gz}{RT_m}}$$

luego:

$$\ln \frac{p_0}{p_1} = \frac{gz}{RT_m}$$

es decir:

$$\left(\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial n} - \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial n} \right) \mathbf{n} = - \frac{gz}{RT_m^2} \frac{\partial T_m}{\partial n} \mathbf{n}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.000 \text{ mb}} \times \frac{1 \text{ mb}}{100 \text{ km}} - \frac{1}{700 \text{ mb}} \times \frac{3 \text{ mb}}{100 \text{ km}} = \\ & = - \frac{9,8 \text{ m s}^{-2} \times 3.000 \text{ m}}{286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} 260^2 \text{ grad}^2} \frac{\partial T_m}{\partial n} \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{\partial T_m}{\partial n} = 2,167 \times 10^{-2} \approx 2,2 \text{ grad}/100 \text{ km}$$

En la costa se establece un régimen de brisas, y se sabe que el gradiente horizontal de presión en superficie es de 2 mb/100 km y que el gradiente horizontal de la temperatura media en el estrato donde se forma brisa es de 3 grad/100 km en la misma dirección pero sentido contrario al gradiente de presión y que además podemos considerar que la temperatura media del estrato es 273 K y que la presión en superficie es de 1.020 mb. Calcular la cima de la brisa.

Evidentemente habrá régimen de brisa en todo el estrato donde el gradiente de presión sea distinto de cero, luego el problema se reduce a encontrar el nivel en el cual se anula el gradiente de presión («nivel de reversión»):

Luego:

$$\ln \frac{p_0}{p_1} = \frac{gz}{RTm}$$

y diferenciando en forma vectorial resulta:

$$\frac{1}{p_0} \nabla_h p_0 - \frac{1}{p_1} \nabla_h p_1 = - \frac{gz}{RTm^2} \nabla_h Tm$$

Haciendo cero al $\nabla_h p_1$, y teniendo en cuenta que $\nabla_h p_0$ y $\nabla_h Tm$ están en la misma dirección pero son de sentido opuesto, resulta:

$$\frac{1}{p_0} \nabla_h p_0 = \frac{gz}{RTm^2} \nabla_h Tm$$

o bien en forma escalar:

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial n} = \frac{gz}{RTm^2} \frac{\partial Tm}{\partial n}$$

es decir:

$$z = \frac{\frac{RTm^2}{gp_0} \frac{\partial p_0}{\partial n}}{\frac{\partial Tm}{\partial n}}$$

Pasando a diferencias finitas, y sustituyendo por sus valores numéricos:

$$z = \frac{286,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \cdot 273^2 \text{ K}^2}{9,8 \text{ m s}^{-2} \times 1.020 \text{ mb}} \times \frac{2 \text{ mb}/100 \text{ km}}{3 \text{ grad}/100 \text{ km}} = \underline{\underline{1.426 \text{ mgp}}}$$

que es el tope del régimen de brisa.

Determinar cuánto debe cambiar la presión a nivel del mar, si se sabe que la superficie de 600 mb continúa teniendo el mismo geopotencial y, sin embargo, la temperatura virtual media del estrato ha experimentado un descenso de dos grados.

Datos: $\bar{T}_v = 268$ K; $p_0 = 1.008$ mb

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{R\bar{T}_v}} \Rightarrow \ln \frac{p_0}{p} = \frac{gz}{R\bar{T}_v}$$

luego:

$$z = \frac{R}{g} \bar{T}_v \ln \frac{p_0}{p}$$

Diferenciando esta ecuación resulta:

$$dz = \frac{R}{g} \ln \frac{p_0}{p} d\bar{T}_v + \frac{R}{g} \bar{T}_v \frac{dp_0}{p_0}$$

Luego, pasando a diferencias finitas:

$$\Delta z = \frac{R}{g} \ln \frac{p_0}{p} \Delta \bar{T}_v + \frac{R}{g} \bar{T}_v \frac{\Delta p_0}{p_0}$$

y como $\Delta z = 0$, resultará:

$$\Delta p_0 = -p_0 \frac{\Delta \bar{T}_v}{\bar{T}_v} \ln \frac{p_0}{p}$$

y sustituyendo los valores numéricos:

$$\Delta p_0 = -1.008 \frac{(-2)}{268} \ln \frac{1.008}{600} = \underline{3,9 \text{ mb}}$$

Determinar el cambio necesario de la temperatura virtual media del estrato para que el geopotencial de 500 mb se incremente en 60 mgp, sabiendo que la presión a nivel del mar ha experimentado un aumento de 6 mb. Datos iniciales: $\bar{T}_v = 261$ K; $p_0 = 1.005$ mb.

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{gz}{R\bar{T}_v} \Rightarrow z = \frac{R}{g} \bar{T}_v \ln \frac{p_0}{p}$$

Diferenciando resulta:

$$dz = \frac{R}{g} \ln \frac{p_0}{p} d\bar{T}_v + \frac{R}{g} \bar{T}_v \frac{dp_0}{p_0}$$

Despejando $d\bar{T}_v$ y pasando a diferencias finitas, resulta:

$$\Delta \bar{T}_v = \frac{\Delta z - \frac{R}{g} \bar{T}_v \frac{\Delta p_0}{p_0}}{\frac{R}{g} \ln \frac{p_0}{p}}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\Delta \bar{T}_v = \frac{60 - \frac{286,8}{9,8} 261 \cdot \frac{6}{1.005}}{\frac{286,8}{9,8} \ln \frac{1.005}{500}} = \frac{60 - 45,6}{20,431} = \underline{\underline{0,7 \text{ grad}}}$$

Calcular la temperatura en la superficie inferior si el geopotencial relativo $H_{1.000}^{500}$ vale 5.350 mgp y el gradiente en la capa es de 0,5 grad/100 mgp.

De la fórmula barométrica de la atmósfera politrópica tenemos:

$$p_1 = p_0 \left(1 - \frac{\gamma Z}{T_0} \right)^{g/R\gamma}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}} = 1 - \frac{\gamma Z}{T_0}$$

es decir:

$$T_0 = \frac{\gamma Z}{1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}}}$$

Aplicando a la expresión anterior los valores numéricos, resulta:

$$T_0 = \frac{\frac{0,5}{100} \times 5.350}{1 - \left(\frac{500}{1.000} \right)^{\frac{286,8 \times 0,5}{100 \times 9,8}}} = \underline{\underline{277,34 \text{ K}}}$$

La distancia entre dos isohipsas, dibujadas a intervalos de 60 m, es de 3 cm en un mapa de la topografía relativa de 500/1.000, siendo su escala de $1:3 \times 10^7$.
Calcular el gradiente horizontal de la temperatura media del estrato.

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{R\bar{T}}} \quad \ln \frac{p_0}{p} = \frac{gz}{R\bar{T}}$$

luego:

$$\bar{T} = \frac{g}{R} \cdot \frac{z}{\ln \frac{p_0}{p}}$$

En una atmósfera politrópica de gradiente $\gamma=0,65$ grad/100 m y presión y temperatura a nivel del mar de 1.010 mb y 280 K, respectivamente, calcular el geopotencial de 500 mb, así como la densidad y la temperatura a ese nivel.

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}} \Rightarrow z = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma}{g}}\right]$$

Luego:

$$z = \frac{280 \times 100}{0,65} \left[1 - \left(\frac{500}{1.000}\right)^{\frac{286,8 \times 0,65}{100 \times 9,8}}\right] = \underline{5.393 \text{ m}}$$

La densidad a 500 mb será:

$$\rho_{500} = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma} - 1} = \frac{p_0}{RT_0} \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma} - 1}$$

luego:

$$\rho_{500} = \frac{1.010 \times 100}{286,8 \times 280} \left(1 - \frac{0,65 \times 5.393}{100 \times 280}\right)^{\frac{9,8 \times 100}{286,8 \times 0,65} - 1} = \underline{0,712 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

y la temperatura a este nivel:

$$T = T_0 - \gamma z$$

luego:

$$T_{500} = 280 - \frac{0,65}{100} \times 5.393 = \underline{245 \text{ K}}$$

Un avión con su altímetro calado a 1.013 mb vuela al nivel de 855 mb de presión. Suponiendo la atmósfera standard, calcular:

- La altitud que marca el altímetro.
- Suponiendo que este avión sobrevuela una estación que marque un QFE de 1.025 mb, ¿qué error dará la lectura del altímetro?

(Nota: no hacer corrección por temperatura.)

$$a) \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}} \Rightarrow z = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma}{g}}\right]$$

luego:

$$z = \frac{288 \times 100}{0,65} \left[1 - \left(\frac{55}{1.013}\right)^{\frac{286,8 \times 0,65}{9,8 \times 100}}\right] = \underline{1.406 \text{ m}}$$

$$b) \quad z = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma}{g}}\right] = \frac{288 \times 100}{0,65} \left[1 - \left(\frac{855}{1.025}\right)^{\frac{286,8 \times 0,65}{9,8 \times 100}}\right] = 1.502 \text{ m}$$

Error del altímetro: $\Delta z = 1.502 - 1.406 = \underline{96 \text{ m}}$.

El avión vuela más alto sobre el suelo que lo que marca el altímetro en 96 m.

En un aeropuerto situado a 120 m por debajo del nivel medio del mar se registra un QFE de 1.008 mb. Calcular:

- El valor del QNH.
- La presión a nivel del mar, sabiendo que la temperatura virtual media es de 40° C.

$$a) \quad QNH = p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma(-z)}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\gamma}}$$

y sustituyendo datos:

$$QNH = p_0 = 1.008 \left(1 + \frac{0,65(-120)}{288 \times 100} \right)^{\frac{9,8 \times 100}{286,8 \times 0,65}} = \underline{993,7 \text{ mb}}$$

- La presión reducida al nivel del mar, o QFF, será:

$$QFF = p_0 = p e^{-\frac{gz}{R\gamma}} = 1.008 e^{-\frac{9,8 \times 120}{286,8 \times 313}} = \underline{994,9 \text{ mb}}$$

1. ECUACIONES FUNDAMENTALES Y PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

La ecuación de estado de los gases perfectos está hoy día totalmente aceptada para describir los procesos del aire seco e incluso los del aire húmedo con las necesarias correcciones de R y T .

Luego:

$$pV = \frac{R^*}{M} \cdot T = R \cdot T \quad [1]$$

V : volumen específico

R^* (cte. universal de los gases) = $8,31432 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{grado}^{-1}$

M (masa molecular media del aire seco) = $28,9644 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

De otra parte, la ecuación fundamental de la hidrostática muestra el cambio de presión en los movimientos verticales de una masa de aire, y su expresión es:

$$\left[dp = - \frac{P'}{R \cdot T'} g \cdot dz \right] \quad [2]$$

donde P' y T' representan la presión y temperatura del ambiente. Ahora bien, por suponer procesos reversibles, resulta:

$$[P' = P]$$

Es decir, la presión de la partícula de aire y el ambiente se igualan y la ecuación hidrostática puede ponerse en la forma:

$$dp = - \frac{P}{RT'} g dz = - \rho' \cdot g \cdot dz \quad [3]$$

La expresión analítica del primer principio de la termodinámica más utilizada en Meteorología es la siguiente:

$$\left[\delta Q = C_p \cdot dT - V \cdot dp = C_p \cdot dT - R \cdot T \frac{dp}{p} \right] \quad [4]$$

Debe hacerse notar que en el intervalo de temperaturas atmosféricas el valor del calor específico a presión constante varía muy poco, lo que permite tomarlo como una constante de valor:

$$C_p = 0,2405 \text{ cal/g} \cdot \text{grado}$$

Otras formas de expresar el primer principio vienen reflejadas en las siguientes ecuaciones:

$$\delta Q = C_v \cdot dT + p \cdot dV \quad [5]$$

y

$$\delta Q = \frac{C_p}{R} p dV + \frac{C_v}{R} V \cdot dp$$

2. LA ENTROPIA EN LA ATMOSFERA

La expresión analítica del segundo principio de la Termodinámica es:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad [6]$$

Definición que, como indicamos, es válida únicamente para procesos reversibles.

La entropía específica, bajo la hipótesis de que el aire se comporta como un gas perfecto y para evoluciones reversibles, puede expresarse de la forma:

$$[S = C_p \ln T - R \ln p + k] \quad [7]$$

o también:

$$[S = C_v \ln T + R \ln V + k] \quad [8]$$

o, en función de p y V ,

$$[S = C_p \ln V + C_v \ln p + k] \quad [8 \text{ bis}]$$

3. EVOLUCIONES ADIABATICAS

En Meteorología el caso de evoluciones adiabáticas y reversibles, es decir, isentrópicas, es de especial interés, y como además el comportamiento del aire se

considera como el de un gas perfecto, podemos aplicar las siguientes ecuaciones para evoluciones finitas:

$$\left[\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{R}{C_v}} \right] \quad [9]$$

$$\left[\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} \right] \quad [10]$$

y también:

$$\left[\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{C_p}{C_v}} \right] \quad [11]$$

Ecuaciones que pueden ser expresadas en las siguientes formas invariantes:

$$T \cdot V^{\frac{R}{C_v}} = \text{invariante} \quad [12]$$

$$T \cdot P^{-\frac{R}{C_p}} = \text{invariante} \quad [13]$$

$$P \cdot V^{\frac{C_p}{C_v}} = \text{invariante} \quad [14]$$

4. EVOLUCIONES POLITROPICAS

Sabemos que el aire, como cualquier otra sustancia, tiene infinitos calores específicos, que dependen del tipo de evolución. Ahora bien, en Meteorología se utiliza ampliamente la aproximación politrópica, en la que, como sabemos, el calor específico es constante y cuyas evoluciones engloban como caso particular los procesos adiabáticos.

Por tanto:

$$\delta Q = C \cdot dT = C_v \cdot dT + p \cdot dV \Rightarrow (C_v - C) dT + p \cdot dV = 0 \quad [15]$$

Análogamente obtendríamos:

$$(C_p - C) dT - V \cdot dp = 0 \quad [16]$$

y

$$(C_p - C) \frac{dv}{V} + (C_v - C) \frac{dp}{p} = 0 \quad [17]$$

En consecuencia, cuando se considere una evolución politrópica a la que corresponde un calor específico c , podremos emplear todas las expresiones vistas en las evoluciones adiabáticas sin más que sustituir C_p y C_v por las diferencias $(C_p - C)$ y $(C_v - C)$. Es decir:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{R}{C_p - C}} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R}{C_v - C}} ; \left(\frac{P}{P_0} \right) = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{C_p - C}{C_v - C}} \quad [18]$$

O también:

$$[P \cdot V^n = \text{constante}]; \quad [n = \frac{C_p - C}{C_v - C}] \quad [19]$$

Siendo:

n = Exponente o índice de politropía.

C = Calor específico del politropo.

En los procesos termodinámicos más simples el calor específico (C) y el exponente del politropo toman los siguientes valores:

- Evolución isobárica: $C = C_p \Rightarrow n = 0$.
- Evolución isostera: $C = C_v \Rightarrow n = \infty$.
- Evolución adiabática: $C = 0 \Rightarrow n = C_p / C_v$.
- Evolución isoterma: $C = \infty \Rightarrow n = 1$.

5. ESTABILIDAD DE ESTRATIFICACION

Para determinar la estabilidad de la atmósfera se procede a elevar una partícula de aire a una distancia vertical elemental de su nivel inicial, donde se encontraba a la misma presión y temperatura que el ambiente. Al ser elevada, la partícula se encontrará sometida a la resultante de las fuerzas de empuje de Arquímedes y de su peso, lo que sirve para tantee la clase de estratificación, ya que si el empuje arquimediano es superior al peso de la burbuja, tendremos una estratificación inestable; por el contrario, si el peso de la burbuja es superior al empuje de Arquímedes, estamos ante una estratificación estable y, finalmente, si el peso de la partícula es igual al empuje de Arquímedes, estamos ante una estratificación indiferente. Luego:

$$\left[\eta = g \frac{\rho - \rho'}{\rho} \right] \begin{cases} > 0 & \text{Estratificación estable} \\ = 0 & \text{Estratificación indiferente} \\ < 0 & \text{Estratificación inestable} \end{cases}$$

Este índice, debido a que:

$$\left[\frac{\rho'}{\rho} = \frac{T}{T'} \right] \quad \text{ya que} \quad P = P'$$

se puede poner en función de las temperaturas.

Resultando:

$$\eta = g \frac{T' - T}{T} \quad [21]$$

y como

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 - \gamma \Delta z \\ T' &= T_0 - \alpha \Delta z \end{aligned} \right\} T_0 = T_0'$$

$$\left[\eta \approx g \frac{\gamma - \alpha}{T_0} \right] \begin{cases} > 0 & \text{estable} \\ = 0 & \text{indiferente} \\ < 0 & \text{inestable} \end{cases}$$

Por otra parte, como ya adelantamos en el Capítulo I, llamando $\alpha = -\frac{\partial T}{\partial Z}$ al

gradiente térmico vertical o gradiente geométrico de la atmósfera y siendo $\gamma = -\frac{dT}{dZ}$

el gradiente de la evolución, puede demostrarse fácilmente que una determinada atmósfera se comportará como estable, inestable o indiferente, comparando el grado de enfriamiento de la partícula elevada con el grado de enfriamiento de la atmósfera para la misma distancia vertical, es decir:

Si $\frac{\partial T}{\partial Z} > \frac{dT}{dZ}$, es decir: $\alpha < \gamma$: Estratificación estable

$\frac{\partial T}{\partial Z} < \frac{dT}{dZ}$, es decir: $\alpha > \gamma$: Estratificación inestable

$\frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{dT}{dZ}$, es decir: $\alpha = \gamma$: Estratificación indiferente

Las evoluciones de mayor interés en Meteorología son:

- Adiabáticas.
- Politrópicas.

Si queremos estudiar la estabilidad de estratificación para este tipo de procesos hay que señalar que, con objeto de simplificar el cálculo, no hay inconveniente en mantener la constancia de los gradientes para esta clase de evoluciones. Luego para procesos adiabáticos tenemos que:

$$\gamma \approx \frac{g}{C_p} = \text{cte}$$

Y también:

$\gamma = \frac{x-1}{x} \frac{g}{R}$, donde: $x = \frac{C_p}{C_v}$ es el índice adiabático.

Y, por tanto, la evolución será estable, inestable o indiferente, según las inecuaciones siguientes:

Caso estable:

$$\alpha < \gamma \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial Z} > -\frac{x-1}{x} \frac{g}{R} ; -\frac{\partial T}{\partial Z} < \frac{g}{C_p}$$

Caso inestable:

$$\alpha > \gamma \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial Z} < -\frac{x-1}{x} \frac{g}{R} ; -\frac{\partial T}{\partial Z} > \frac{g}{C_p}$$

Caso indiferente:

$$\alpha = \gamma \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial Z} = -\frac{x-1}{x} \frac{g}{R} ; -\frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{g}{C_p}$$

Para el caso de evoluciones politrópicas, teniendo en cuenta que el gradiente de evolución de un polítopo será función del calor específico del proceso y que fácilmente se demuestra que su valor es:

$$\gamma_p = \frac{g}{C_p - C} = \frac{n-1}{n} \frac{g}{R}$$

se deduce que la atmósfera se comportará como estable, inestable o indiferente según que el gradiente térmico vertical y el gradiente politrópico sean:

Estratificación estable:

$$\alpha < \gamma_p \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial Z} > -\frac{n-1}{n} \frac{g}{R} ; -\frac{\partial T}{\partial Z} < \frac{g}{C_p - C}$$

Estratificación inestable:

$$\alpha > \gamma_p \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial Z} < -\frac{n-1}{n} \frac{g}{R} ; -\frac{\partial T}{\partial Z} > \frac{g}{C_p - C}$$

Estratificación indiferente:

$$\alpha = \gamma_p \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial Z} = -\frac{n-1}{n} \frac{g}{R} ; -\frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{g}{C_p - C}$$

En rigor, estos criterios sólo sirven para tanteear la estabilidad de estratificación, ya que los gradientes de las evoluciones adiabáticas o politrópicas no son constantes. Sabemos que la diferencia de temperaturas entre las partículas y el ambiente modifica el valor de los gradientes y que, incluso para elevaciones infinitesimales, el valor del gradiente adiabático sería:

$$\gamma' = \frac{g}{C_p T}$$

Análogamente, el gradiente politrópico vendría en función de las temperaturas de la burbuja y del medio ambiente.

6. NIVEL DE EQUILIBRIO

Es la altura a la cual una masa de aire que asciende espontáneamente llega a alcanzar una temperatura T_e (temperatura de equilibrio) igual que la del ambiente que le rodea.

Suponiendo un estrato en que el gradiente térmico vertical α sea constante, donde evoluciona una partícula espontáneamente con un gradiente γ , también constante (lo cual, insistimos, es sólo aproximado), tendremos:

$$T_{\Delta z} = T_0 - \alpha \cdot \Delta z$$

$$T_{\Delta z} = T_0 - \gamma \cdot \Delta z$$

y como para el nivel de equilibrio:

$$T_{\Delta z} = T_{\Delta z} = T_e$$

Resulta:

$$T_0 - \alpha \Delta z = T_0 - \gamma \cdot \Delta z$$

Luego:

$$\Delta z = \frac{T_0 - T'_0}{\gamma - \alpha}$$

Ecuación que debe manejarse con precaución, ya que como sabemos:

a) El gradiente térmico vertical sólo se puede considerar constante en la atmósfera entre dos puntos notables (aproximación politrópica).

b) En rigor, el gradiente adiabático o politrópico de la evolución no puede considerarse constante, ya que depende de las temperaturas de las partículas y del ambiente.

7. LA TEMPERATURA POTENCIAL Y SU RELACION CON LA ENTROPIA

La temperatura potencial es la que toma una partícula de aire cuando se la lleva por vía adiabática y reversible a un nivel de presión de referencia P_0 , que es el de 1.000 mb.

La temperatura potencial viene dada por la expresión:

$$\theta = T \left(\frac{1.000}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$

y como:

$$\frac{R}{C_p} = \frac{0,0685}{0,2405} = 0,2848$$

$$\theta = T \left(\frac{1.000}{p} \right)^{0,2848}$$

El gradiente vertical de la temperatura potencial se puede determinar operando en la forma:

Tomando la ecuación en forma logarítmica:

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{C_p} \ln 1.000 - \frac{R}{C_p} \ln p$$

derivando respecto a Z:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial Z} - \frac{R}{C_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial Z}$$

donde, al ser:

$$p = \rho R T \quad \text{y,} \quad \frac{\partial p}{\partial Z} = -\rho g$$

resulta:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{R}{C_p} \frac{\rho g}{\rho R T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{g}{C_p} \right)$$

es decir:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\theta}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial Z} + \gamma \right)$$

Sabemos que la temperatura potencial es función sólo de la entropía específica y además función creciente. Considerando el aire como gas perfecto, la demostración es muy sencilla, ya que:

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

y derivando logarítmicamente la definición de temperatura potencial:

$$\theta = T \left(\frac{1.000}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$

resulta:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p}$$

por lo que:

$$dS = C_p \frac{d\theta}{\theta}$$

que integrando resulta:

$$S - S_0 = C_p (\ln \theta - \ln \theta_0) = C_p \ln \frac{\theta}{\theta_0}$$

que es una ecuación fundamental en la teoría de los diagramas meteorológicos.

A un gramo de aire, sometido a una presión de 1.010 mb y a una temperatura de 10° C, se le aportan 6 calorías; simultáneamente la presión desciende en 40 mb. Calcular la variación de temperatura que experimentará la masa de aire seco.

$$\delta Q = C_p dT - V dp$$

o bien:

$$\delta Q = C_p dT - RT \frac{dp}{p}$$

Pasando a diferencias finitas:

$$Q \simeq C_p \Delta T - RT \frac{\Delta p}{p}$$

Despejando:

$$\Delta T \simeq \frac{Q + RT \frac{\Delta p}{p}}{C_p}$$

Luego:

$$\Delta T \simeq \frac{6 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} + 0,0685 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 283 \text{ K} \times \frac{-40 \text{ mb}}{1.010 \text{ mb}}}{0,2405 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ grad}^{-1}} = \underline{\underline{21,8 \text{ grad}}}$$

Determinar el calor necesario para incrementar la temperatura de 1 kg de aire en 7 grados a presión constante.

$$\delta Q = C_p dT - V dp$$

luego:

$$\delta Q = C_p dT$$

Para variaciones pequeñas utilizamos la aproximación de las diferencias finitas, luego:

$$Q \simeq C_p \cdot \Delta T$$

Por tanto:

$$Q \simeq 0,2405 \times 10^3 \text{ cal} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 7 \text{ grad} = \underline{1,684 \times 10^3 \text{ cal} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Determinar el calor que sería necesario aportar a una burbuja de aire si su temperatura disminuye en 25 grados debido a un ascenso de 3,5 km. Calcular además el trabajo de expansión que acompaña a este proceso.

Como no sabemos el gradiente vertical de temperatura partimos de la hipótesis:

$$\frac{T}{T'} \approx 1$$

luego:

$$\delta Q = C_p dT - V dp = C_p dT - RT \frac{dp}{p}$$

y como:

$$p = \rho RT \\ dp = -\rho' g dz$$

y además:

$$\frac{\rho}{\rho'} \approx 1$$

ya que:

$$\left(\frac{T}{T'} \approx 1 \right)$$

resultará:

$$\delta Q = C_p dT + g dz = C_p \left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{C_p} \right)$$

luego:

$$\frac{\delta Q}{dz} \approx C_p (\gamma - \gamma_p)$$

donde:

$$\gamma_p = \frac{25 \text{ grad}}{3.500 \text{ m}} = 0,694 \text{ grad}/100 \text{ m}$$

resulta:

$$\frac{\delta Q}{dz} \approx 0,2405 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} (0,98 \text{ grad}/100 \text{ m} - 0,694 \text{ grad}/100 \text{ m}) = \\ = 0,06878 \text{ cal/g} \times 100 \text{ m}$$

Por tanto, para 3,5 km será:

$$\frac{\delta Q}{dz} \approx \underline{2,41 \text{ cal/g} \times 3,5 \text{ km}}$$

Determinar el trabajo de expansión de una partícula que asciende adiabáticamente, sabiendo que su temperatura disminuye 1 grado por cada 100 m de ascenso.

$$\delta W = R dT - V dp$$

Como la evolución es adiabática:

$$\delta Q = 0 = C_p dT - V dp$$

Luego:

$$C_p dT = V dp$$

Y resulta:

$$\delta W = R dT - C_p dT = (R - C_p) dT$$

es decir:

$$\frac{\delta W}{dz} = (R - C_p) \frac{dT}{dz}$$

Donde:

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{dz} &= (R - C_p) (-\gamma) = \frac{1 \text{ grad}}{100 \text{ m}} (0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} - 0,0685 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}) = \\ &= 0,17 \text{ cal/g} \times 100 \text{ m} = \underline{0,71 \text{ J/g} \times 100 \text{ m}} \end{aligned}$$

Otra forma de calcularlo sería mediante la expresión obtenida en el problema anterior:

$$\delta W = \frac{g}{x} \frac{T}{T'} dz$$

Efectuando la hipótesis: $\frac{T}{T'} \approx 1$:

$$\frac{\delta W}{dz} = \frac{g}{x} = \frac{g}{C_p} C_v = \gamma \cdot C_v$$

Luego:

$$\frac{\delta W}{dz} = 1 \text{ grad}/100 \text{ m} \times 0,1719 \text{ cal/g} \cdot \text{grad} = 0,17 \text{ cal/g} \cdot 100 \text{ m} = \underline{0,71 \text{ J/g} \cdot 100 \text{ m}}$$

Una burbuja con una temperatura de 15°C y una presión de 1.010 mb asciende adiabáticamente hasta 700 mb. Determinar la temperatura de la burbuja en el nivel superior.

Como el proceso es adiabático resultará:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Luego:

$$T_1 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$T_1 = 288K \left(\frac{700}{1.010} \right)^{\frac{0,0685}{0,2405}} = 288 \left(\frac{700}{1.010} \right)^{0,2848} K = \underline{\underline{259,4 K}}$$

Determinar el calor perdido por una burbuja que asciende para que su densidad se mantenga constante. (Considerar la atmósfera homogénea.)

$$\delta Q = C_p dT - V dp$$

Con las hipótesis conocidas:

$$\delta Q = C_p dT + g dz$$

y en definitiva:

$$\frac{\delta Q}{dz} = C_p \left(\frac{dT}{dz} + \gamma \right)$$

Como la partícula mantiene su densidad constante:

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{g}{R}$$

según se ha demostrado en el problema anterior.

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{dz} &= C_p \left(\frac{g}{C_p} - \frac{g}{R} \right) = 0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} (0,98 - 3,4) \text{ grad}/100 \text{ m} = \\ &= \underline{\underline{-0,582 \text{ cal/g} \times 100 \text{ m}}} \end{aligned}$$

Determinar la densidad de una burbuja que asciende politrópicamente en función de la presión. Encontrar una aplicación numérica para una evolución politrópica desde el nivel $p_0 = 1.000 \text{ mb}$, $T_0 = 277 \text{ K}$ hasta $p = 500 \text{ mb}$, sabiendo que el calor específico del politropo es: $c = 0,05 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}$.

Sabemos que:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p - c}}$$

Luego:

$$\frac{\frac{p}{\rho R}}{\frac{p_0}{\rho_0 R}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p - c}}$$

Operando resulta:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{p_0}{p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p - c}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p - c} - 1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p - c} - 1}$$

y en definitiva:

$$\rho_0 = \rho \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{c - c_v}{c_p - c}}$$

Luego:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{c_p - c}{c_p - c}} \quad \text{o bien} \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Aplicación numérica: $p_0 = 1.000 \text{ mb}$, $T_0 = 277 \text{ K}$, $p = 500 \text{ mb}$.

En este caso:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{1.000 \times 100 \text{ Pa}}{286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 277 \text{ K}} = 1,2588 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{c_p - c}{c_p - c} = \frac{(0,1719 - 0,05) \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}{(0,2405 - 0,05) \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}} = 0,6399$$

y por tanto:

$$\rho = 1,2588 \left(\frac{500}{1.000}\right)^{0,6399} \text{ kg m}^{-3} = \underline{\underline{0,8078 \text{ kg m}^{-3}}}$$

Los datos de un radiosondeo arrojan los siguientes valores de presión y temperatura de los puntos notables.

p (mb)	1.022	987	810	740	578
t (°C)	17	10	4	0	-12

Calcular las temperaturas potenciales para cada punto y expresar las condiciones de estabilidad de la atmósfera.

En general:

$$\theta = T \left(\frac{1.000}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Para el primer punto:

$$\theta_1 = 290 \text{ K} \left(\frac{1.000}{1.022} \right)^{\frac{0,0685}{0,2405}} = 288,2 \text{ K} = 15,2^\circ \text{ C}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 284 \text{ K} = 11^\circ \text{ C} \\ \theta_3 &= 294 \text{ K} = 21^\circ \text{ C} \\ \theta_4 &= 297,4 \text{ K} = 24,4^\circ \text{ C} \\ \theta_5 &= 305,1 \text{ K} = 32,1^\circ \text{ C}\end{aligned}$$

En donde vemos que la temperatura potencial crece con la altura, luego esa atmósfera será estable.

Una partícula con una temperatura 6 grados inferior a la del ambiente desciende espontáneamente por vía adiabática en una atmósfera de gradiente térmico vertical α igual a 0,65 grad/100 m. Determinar el descenso de la partícula suponiendo que se para justo en el momento en el que las temperaturas se igualan.

Sabemos que:

$$Z_e = \frac{T_0 - T'_0}{\gamma - \alpha} = \frac{-6 \text{ grad}}{(0,98 - 0,65) \text{ grad}/100 \text{ m}} = \underline{\underline{-1.818 \text{ m}}}$$

Es decir, la partícula ha descendido aproximadamente 1,8 km.

Determinar la variación de entropía entre dos puntos de la atmósfera, sabiendo que en el primero su temperatura potencial es de 273 K y a otro nivel superior la temperatura potencial es de 285 K. Averigüe si la entropía crece o disminuye con la altura.

Sabemos que la entropía viene dada por la ecuación:

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Y la temperatura potencial es:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p}$$

Luego de la simple inspección de ambas ecuaciones resulta:

$$dS = C_p \frac{d\theta}{\theta}$$

que integrada es:

$$S - S_0 = C_p \ln \frac{\theta}{\theta_0}$$

Aplicándola a nuestro problema:

$$S - S_0 = 0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \ln \frac{285}{273} = \underline{\underline{0,01035 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}}$$

Luego la entropía *crece* con la altura.

Calcular el cambio de temperatura en 36 horas a un nivel fijo provocado por el descenso adiabático de una masa de aire, con una velocidad vertical de $0,2 \text{ cm s}^{-1}$, sabiendo que el gradiente térmico vertical de la atmósfera es $0,7 \text{ grad}/100 \text{ m}$.

Sabemos que:

$$T = T_0 + \gamma \Delta z$$

$$T' = T'_0 + \alpha \Delta z$$

Es evidente que $T_0 = T'_0$.

Luego restando la variación de temperatura ambiente de la variación de temperatura en la evolución resulta:

$$\Delta T = T - T' = (\gamma - \alpha) \Delta z = (\gamma - \alpha) V \Delta t$$

Y por tanto:

$$\Delta T = (0,98 - 0,7) \text{ grad}/100 \text{ m} \times 0,002 \text{ m s}^{-1} \times 3.600 \times 365 \text{ s} = \underline{\underline{0,73 \text{ grad}}}$$

1. AIRE HUMEDO: INTRODUCCION

Considerando el vapor de agua como un gas perfecto se comprueba que los valores determinados de la constante R' del vapor de agua son muy similares dentro de las temperaturas atmosféricas. Por tanto, en Meteorología se toma el valor de:

$$R' = \frac{E \cdot V}{T} = 461 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} = 0,1102 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$$

De otra parte, medidas espectrométricas han confirmado, asimismo, las pequeñas variaciones del calor específico a presión constante para el vapor de agua, por lo que en aplicaciones prácticas se utiliza el valor constante de $c'_p = 0,444 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$.

2. INDICES DE HUMEDAD

En Meteorología se utilizan distintos índices para determinar el grado de humedad de la atmósfera. Describiremos brevemente estos índices y la relación entre ellos, así como las fórmulas que permiten su cálculo numérico.

a) *Tensión de vapor (e)*

Es la presión parcial del vapor de agua contenido en la atmósfera. Su determinación a partir de los datos del psicrómetro es inmediata, ya que se dispone de tablas psicrométricas. No obstante, veremos algunas ecuaciones para su cálculo.

Partiendo de la relación de la temperatura equivalente:

$$T_e = T' + \frac{mL}{C_p} = T' + \frac{M'L'}{C_p}$$

siendo:

m : proporción de mezcla del aire
 M' : proporción de mezcla saturante para T'
 C_p : calor específico a presión constante del aire seco
 T_e : temperatura equivalente
 T : temperatura del termómetro seco
 T' : temperatura del termómetro húmedo

Teniendo en cuenta que:

$$m \approx 0,622 \frac{e}{p} \quad \text{y} \quad M' \approx 0,622 \frac{E'}{p}$$

resulta:

$$T + 0,622 \frac{p}{C_p} \frac{e}{L} \approx T' + 0,622 \frac{p}{C_p} \frac{E'}{L}$$

Luego:

$$T - T' = \frac{0,622}{p \cdot C_p} L(E' - e)$$

y despejando e :

$$e = E' - \frac{C_p \cdot p}{0,622 \cdot L} (t - t')$$

Dando valores a los factores C_p y L se obtiene:

$$L = 600 \text{ cal g}^{-1} \quad ; \quad C_p = 0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}$$

$$e = E' - \frac{p}{1,552} (t - t')$$

o sea:

$$e = E' - \frac{1}{2} (t - t') \frac{p}{776}$$

Ecuación análoga a la empírica de Sprung, que es:

$$e = E' - \frac{1}{2} (t - t') \frac{p}{755}$$

Hacemos notar que en los cálculos de los problemas usaremos la fórmula de Sprung, ya que es la más aproximada y la que se utiliza, por tanto, más ampliamente en los cálculos meteorológicos.

b) *Proporción de mezcla (m)*

Se define como la masa de vapor contenida en la unidad de masa de aire seco.
Sea m_v la masa de vapor:

$$eV = m_v R'T$$

Luego:

$$\frac{m_v}{V} = \rho' = \frac{e}{R'T}$$

donde:

ρ' = densidad del vapor de agua
 R' = constante del vapor de agua
 e = tensión de vapor

y siendo m_a la masa de aire seco que ocupa el mismo volumen a la misma temperatura:

$$(p - e)V = m_a RT$$

luego:

$$\frac{m_a}{V} = \rho = \frac{p - e}{RT}$$

donde:

ρ = densidad del aire seco
 R = constante del aire seco
 $(p - e)$ = presión parcial del aire seco

Por lo que resulta:

$$m = \frac{m_v}{m_a} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{R}{R'} \frac{e}{p - e}$$

Y como:

$$\frac{R}{R'} = 0,622$$

se obtiene finalmente:

$$m = 0,622 \frac{e}{p-e} \text{ g. vapor/g. de aire seco}$$

o también:

$$m \simeq \frac{5}{8} \frac{e}{p-e} \text{ g. vapor/g. aire seco}$$

c) *Humedad específica (q)*

Se define como la cantidad de vapor contenido en la unidad de masa de aire húmedo.

Es decir:

$$q = \frac{m_v}{m_{AH}}$$

siendo

m_v = masa de vapor
 m_{AH} = masa de aire húmedo

y como la proporción de mezcla es:

$$m = \frac{m_v}{m_a}$$

Es fácil encontrar la siguiente relación:

$$q = \frac{m}{m+1}$$

En efecto:

$$q = \frac{m_v}{m_{AH}} = \frac{\frac{m_v}{m_a}}{\frac{m_v}{m_a} + 1} = \frac{\frac{m_v}{m_a}}{\frac{m_v + m_a}{m_a}} = \frac{m_v}{m_v + m_a} = \frac{m}{m+1}$$

Luego:

$$q = \frac{0,622 \frac{e}{p-e}}{0,622 \frac{e}{p-e} + 1}$$

Operando resulta:

$$q = 0,622 \frac{e}{p - (1 - 0,622)e}$$

Introduciendo el valor de $m \simeq \frac{5}{8} \frac{e}{p-e}$, se obtiene: $q = \frac{m}{m+1} = \frac{5e}{8p-3e}$

Finalmente, hay que señalar que como los valores de e son muy inferiores a p en la atmósfera resulta en fórmulas aproximadas:

$$m \simeq q \simeq 0,622 \frac{e}{p}$$

De otra parte, conviene resaltar que tanto la humedad específica como la proporción de mezcla en la práctica meteorológica se suelen expresar en gramos de vapor por kilogramo de aire húmedo o seco, respectivamente.

d) *Humedad absoluta (a)*

Es la densidad de vapor, y suele expresarse en gramos por metro cúbico de aire.

Luego:

$$a = 10^6 \rho, \text{ siempre que } \rho \text{ se exprese en } \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Como la tensión de vapor suele venir expresada en mb, tenemos que:

$$a = \frac{e}{R'T} = \frac{e(mb) \times 10^2 (\text{Pa} \cdot \text{mb}^{-1})}{0,461 (\text{J g}^{-1} \text{ grad}^{-1}) T(\text{K})}, \text{ (a en } \text{g m}^{-3}\text{)}$$

Luego:

$$a (\text{g m}^{-3}) = 216,9 \frac{e(mb)}{T(\text{K})}$$

e) *Humedad relativa (h)*

La humedad relativa viene definida por el cociente entre la tensión de vapor efectiva y la máxima tensión correspondiente a la temperatura de la masa de aire considerada.

Es decir:

$$h = \frac{e}{E}$$

Aunque suele venir expresada en tanto por ciento, luego:

$$h = 100 \frac{e}{E}$$

Como la humedad absoluta es función de e y T resulta que también se verifica:

$$h = 100 \frac{a}{A}$$

donde A es la humedad absoluta máxima.

Finalmente pueden deducirse relaciones aproximadas de h con m y q de la forma:

$$h \simeq 100 \frac{m}{M} \simeq 100 \frac{q}{Q}$$

donde M y Q representan los correspondientes valores máximos.

3. CONSTANTES DEL AIRE HUMEDO

Aplicando la ley de Dalton a la mezcla de vapor y aire seco podemos obtener una constante R de la mezcla en función del contenido en vapor. En efecto, en una mezcla de gases la constante de la misma será:

$$\bar{R} = \frac{\sum M_i R_i}{\sum M_i}$$

Luego, en función de la humedad específica resultará:

$$\bar{R} = R(1 - q) + R'q$$

siendo:

\bar{R} : constante de la mezcla de aire y vapor

R : constante del aire seco

R' : constante del vapor de agua

q : humedad específica

ya que:

$$q = \frac{m_v}{m_{AH}}$$

y por tanto:

$$1 - q = 1 - \frac{m_v}{m_{AH}} = \frac{m_{AH}}{m_{AH}} - \frac{m_v}{m_{AH}} = \frac{m_a}{m_{AH}}$$

siendo:

m_a : masa de aire seco

m_v : masa de vapor

m_{AH} : masa de aire húmedo

Análogamente:

$$\bar{C}_p = C_p(1 - q) + C'_p \cdot q$$

La constante del aire húmedo \bar{R} se puede simplificar y poner en la forma:

$$\bar{R} = R \left(1 - q + \frac{1}{0,622} q \right) = R(1 + 0,605 q)$$

Sabemos que:

$$R' > \bar{R} > R$$

pero dado el pequeño contenido en vapor del aire puede efectuarse la aproximación:

$$\bar{R} \simeq R$$

Análogamente:

$$C'_p > \bar{C}_p > C_p$$

aunque en la práctica se toma:

$$\bar{C}_p \simeq C_p$$

Por otra parte, el gradiente adiabático del aire húmedo viene dado por la expresión:

$$\bar{\gamma} = \frac{g}{\bar{C}_p} = \frac{g}{C_p(1 - q) + C'_p \cdot q}$$

siendo $\bar{\gamma} < \gamma$, pero la diferencia es tan pequeña que hasta la saturación suele tomarse γ como gradiente adiabático del aire húmedo.

4. TEMPERATURA VIRTUAL

Se define la temperatura virtual de una masa de aire húmedo como la temperatura que debería tomar una masa de aire seco para que a igualdad de presión tuviera la misma densidad.

En consecuencia:

$$\bar{R}T = RT_v$$

Por tanto:

$$T_v = \frac{\bar{R}}{R} T = T \frac{R(1+0,605 q)}{R}$$

es decir:

$$T_v = T(1+0,605 q) \simeq T\left(1 + \frac{3}{5}q\right)$$

y como

$$q \simeq 0,622 \frac{e}{p}$$

resulta la ecuación aproximada:

$$T_v \simeq T\left(1 + 0,605 \times 0,622 \frac{e}{p}\right) \simeq T\left(1 + 0,376 \frac{e}{p}\right) \simeq T\left(1 + \frac{3e}{8p}\right)$$

5. TEMPERATURA EQUIVALENTE Y TEMPERATURA DEL TERMOMETRO HUMEDO

Se llama temperatura equivalente la que tomaría una masa de aire húmedo si todo su vapor se condensara y el calor latente fuese absorbido por la masa de aire seco por vía isobárica.

La fórmula de la temperatura equivalente es:

$$t_e = t + \frac{mL}{C_p}$$

siendo

t : temperatura del aire

m : proporción de mezcla

L : calor latente de condensación

C_p : calor específico a presión constante

La temperatura equivalente es un invariante de las masas de aire para evaporaciones y condensaciones isobáricas en su seno.

La temperatura t' del termómetro húmedo es también un buen invariante de las masas de aire para este tipo de procesos y, además, se puede establecer fácilmente la relación entre las temperaturas equivalente, efectiva y del termómetro húmedo de la forma siguiente:

$$t_e = t + \frac{mL}{C_p} = t' + \frac{M'L'}{C_p}$$

Sabiendo que la temperatura del aire es 16°C , su punto de rocío es de 9°C y su presión 1.000 mb , determinar la temperatura virtual, la humedad relativa, la humedad absoluta y la densidad de la masa de aire.

Datos: $E(9^{\circ}\text{C}) = 11,5\text{ mb}$. $E(16^{\circ}\text{C}) = 18,2\text{ mb}$.

a) Sabemos que la humedad específica es aproximadamente:

$$q \simeq 0,622 \frac{e}{p}$$

Por tanto:

$$q \simeq 0,622 \frac{11,5\text{ mb}}{1.000\text{ mb}} = 7,153 \times 10^{-3}\text{ g/g}$$

y en consecuencia:

$$T_v = T \left(1 + \frac{3}{5} q \right) = 289 \left(1 + \frac{3}{5} \times 7,153 \times 10^{-3} \right) \text{K} = \underline{\underline{290,2\text{ K}}}$$

b) La humedad relativa:

$$h = 100 \frac{e}{E} = 100 \frac{11,5}{18,2} = \underline{\underline{63\%}}$$

c) La humedad absoluta:

$$a = 216,9 \frac{e}{p} = 216,9 \frac{11,5}{289} = \underline{\underline{8,63\text{ g} \cdot \text{m}^{-3}}}$$

d) La densidad del aire:

$$\rho = \frac{p}{RT_v} = \frac{1.000 \times 10^2\text{ Pa}}{286,8\text{ J kg}^{-1}\text{ grad}^{-1} \times 290,2\text{ K}} = \underline{\underline{1,2\text{ kg m}^{-3}}}$$

Un psicrómetro indica las temperaturas $t=20^{\circ}\text{C}$ y $t'=16^{\circ}\text{C}$. Calcular la proporción de mezcla de la masa de aire, sabiendo que la presión es de 1.005 mb y que la máxima tensión de vapor para 16°C es $E_{16}=18,2\text{ mb}$.

Debemos calcular en primer lugar la tensión efectiva de la masa del aire; para ello utilizamos la ecuación de Sprung:

$$e = E' - \frac{1}{2}(t - t') \frac{p}{755}$$

Y tendremos:

$$e = 18,2\text{ mb} - \frac{1}{2}(20 - 16) \frac{1.005}{755}\text{ mb} = 15,5\text{ mb}$$

Luego la proporción de mezcla será:

$$m = 0,622 \frac{e}{p - e} = 0,622 \frac{15,5}{1.005 - 15,5} = 9,7 \times 10^{-3}\text{ g/g} = \underline{\underline{9,7\text{ g/kg}}}$$

Calcular las constantes R y C_p de una masa de aire húmedo, sabiendo que la tensión de vapor es de 10 mb y la presión 1.005 mb. Determinar además el gradiente adiabático de esta masa de aire.

Sabemos que:

$$\bar{R} = R(1 - q) + R'q$$

Y como:

$$q \simeq \varepsilon \frac{e}{p} \simeq \frac{R e}{R' p}$$

resulta:

$$\bar{R} \simeq R \left(1 - \frac{5e}{8p} \right) + R \frac{e}{p} = R \left(1 + \frac{3e}{8p} \right)$$

Luego:

$$\bar{R} = 0,0685 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{10 \text{ mb}}{1.005 \text{ mb}} \right) = \underline{0,0689 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}$$

Análogamente:

$$\bar{C}_p = C_p(1 - q) + C'_p \cdot q$$

Luego:

$$\bar{C}_p \simeq C_p \left(1 - \frac{5e}{8p} \right) + C'_p \frac{5e}{8p}$$

es decir:

$$\begin{aligned} \bar{C}_p &\simeq 0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \left(1 - \frac{5}{8} \frac{10 \text{ mb}}{1.005 \text{ mb}} \right) + 0,444 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \frac{5}{8} \frac{10 \text{ mb}}{1.005 \text{ mb}} \\ &= \underline{0,2417 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}} \end{aligned}$$

Finalmente, el gradiente adiabático será:

$$\bar{\gamma} = \frac{g}{\bar{C}_p} = \frac{9,8 \text{ m s}^{-2}}{0,2417 \times 4,18 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1}} = \underline{0,97 \text{ grad}/100 \text{ m}}$$

y comprobamos que el gradiente adiabático del aire húmedo es ligeramente menor que el del aire seco: $\gamma > \bar{\gamma}$.

Sabiendo que la presión es de 985 mb, que la temperatura es de 20° C y que la tensión de vapor tiene un valor de 18,2 mb, calcular la densidad del aire:

- Suponiéndolo totalmente seco.
- En las condiciones reales de humedad.

a) En el primer caso:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{985 \times 10^2 \text{ Pa}}{286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 293 \text{ K}} = \underline{1,172 \text{ kg m}^{-3}}$$

b) En el segundo caso tenemos que:

$$\bar{R} = R \left(1 + \frac{3e}{8p} \right)$$

luego:

$$\bar{R} = 286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \left(1 + \frac{3 \cdot 18,2 \text{ mb}}{8 \cdot 985 \text{ mb}} \right) = 288,79 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1}$$

es decir:

$$\bar{\rho} = \frac{p}{\bar{R}T} = \frac{985 \times 10^2 \text{ Pa}}{288,79 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 293 \text{ K}} = \underline{1,164 \text{ kg m}^{-3}}$$

Otra forma es mediante la temperatura virtual. En efecto:

$$T_v = T \left(1 + \frac{3}{5} q \right) \simeq T \left(1 + \frac{3e}{8p} \right)$$

que corresponde en este caso a un valor numérico de:

$$T_v = 293 \text{ K} \left(1 + \frac{3 \cdot 18,2 \text{ mb}}{8 \cdot 985 \text{ mb}} \right) = 295 \text{ K}$$

Luego:

$$\bar{\rho} = \frac{p}{RT_v} = \frac{985 \times 10^2 \text{ Pa}}{286,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 295 \text{ K}} = \underline{1,164 \text{ kg m}^{-3}}$$

Una masa de aire húmedo tiene una humedad relativa del 90 por 100, su presión es 1.015 mb y su temperatura es de 20° C. Calcular el gradiente adiabático de esta masa de aire. Dato: $E(20^\circ \text{ C}) = 23,38 \text{ mb}$.

La tensión de vapor es:

$$h = 100 \frac{e}{E}$$

luego:

$$e = \frac{h \cdot E}{100} = 0,9 \times 23,38 = 21,04 \text{ mb}$$

La humedad específica es:

$$q = \frac{5e}{8p - 3e} = \frac{5 \times 21,04}{8 \times 1.015 - 3 \times 21,04} = 0,0131 \text{ g/g}$$

Y como el calor específico a presión constante de la masa de aire húmedo es:

$$\begin{aligned} \bar{C}_p &= C_p(1 - q) + C'_p q = 0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} (1 - 0,0131) + \\ &+ 0,444 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} 0,0131 = 0,2432 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \end{aligned}$$

resulta que el gradiente adiabático será:

$$\bar{\gamma} = \frac{g}{\bar{C}_p} = \frac{9,8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{0,2432 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 4,18 \text{ J cal}^{-1} \times 10^3 \text{ g kg}^{-1}} = \underline{\underline{0,967 \text{ grad}/100 \text{ m}}}$$

Una masa de aire tiene una temperatura de 12°C , una presión de 1.020 mb y una humedad relativa de 75 por 100 . Si $E(12^{\circ}\text{C}) = 14,01\text{ mb}$, calcular:

- La proporción de la mezcla.
- La humedad específica.
- La humedad absoluta.

a) La proporción de mezcla:

$$e = \frac{hE}{100} = 0,75 \times 14,01\text{ mb} = 10,51\text{ mb}$$

y por tanto:

$$m = \varepsilon \frac{e}{p - e} = 0,622 \frac{10,51}{1.020 - 10,51} = \underline{6,48 \times 10^{-3}\text{ g/g}}$$

b) La humedad específica:

$$q = \frac{m}{m + 1} = \frac{6,48 \times 10^{-3}}{6,48 \times 10^{-3} + 1} = \underline{6,44 \times 10^{-3}\text{ g/g}}$$

o bien:

$$q = \frac{5e}{8p - 3e} = \frac{5 \times 10,51}{8 \times 1.020 - 3 \times 10,51} \simeq \underline{6,44 \times 10^{-3}\text{ g/g}}$$

c) La humedad absoluta:

$$a = \frac{e}{R'T} = \frac{10,51 \times 10^2\text{ Pa}}{0,459\text{ J g}^{-1}\text{ grad}^{-1} \times 285\text{ K}} = \underline{8,03\text{ g m}^{-3}}$$

o también:

$$a = 216,9 \frac{e}{T} = 216,9 \frac{10,51}{285} = \underline{8,00\text{ g m}^{-3}}$$

Una muestra de aire saturado tiene una presión de 995 mb y una temperatura de 30° C. Calcular:

a) La temperatura virtual.

b) Suponiendo que comprimimos la masa de aire por vía adiabática hasta 1.005 mb, determinar la temperatura virtual en este nuevo nivel.

Dato: $E(30^\circ \text{C}) = 42,42 \text{ mb}$.

$$a) \quad T_v \simeq T \left(1 + \frac{3e}{8p} \right).$$

luego:

$$T_v \simeq 303 \text{ K} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{42,42}{995} \right) = \underline{307,8 \text{ K}}$$

b) Compresión adiabática hasta 1.005 mb:

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 303 \text{ K} \left(\frac{1.005}{995} \right)^{0,2848} = 303,9 \text{ K}$$

Aplicando el teorema de las expresiones relativas:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{e}{e_0} \Rightarrow e = e_0 \frac{p}{p_0} = 42,42 \frac{1.005}{995} = 42,85 \text{ mb}$$

y la temperatura virtual será:

$$T_v \simeq T \left(1 + \frac{3e}{8p} \right) = 303,9 \text{ K} \left(1 + \frac{3}{8} \times \frac{42,85}{1.005} \right) = \underline{308,8 \text{ K}}$$

En la capa inferior de una columna atmosférica el gradiente vertical de temperatura es 0,7 grad/100 m y el gradiente vertical de la temperatura virtual es $-0,3$ grad/100 m. Sabiendo que la temperatura en la superficie es de 25°C , determinar el gradiente vertical de la humedad específica.

Sabemos que la temperatura virtual viene expresada por:

$$T_v = T \left(1 + \frac{3}{5} q \right)$$

Derivando respecto a z la ecuación anterior resulta:

$$\frac{\partial T_v}{\partial z} = \left(1 + \frac{3}{5} q \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{3}{5} T \frac{\partial q}{\partial z}$$

Y como $\frac{3}{5} q \ll 1$, podemos efectuar la aproximación:

$$\frac{\partial T_v}{\partial z} \simeq \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{3}{5} T \frac{\partial q}{\partial z}$$

Despejando $\frac{\partial q}{\partial z}$, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial z} &= \frac{\frac{\partial T_v}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}}{\frac{3}{5} \cdot T} = \frac{-0,3 \text{ grad}/100 \text{ m} - 0,7 \text{ grad}/100 \text{ m}}{\frac{3}{5} \times 298 \text{ K}} = \\ &= \underline{\underline{-5,59 \times 10^{-3} \text{ g/g} \cdot 100 \text{ m}}} \end{aligned}$$

1. ECUACION DE CLASIUS-CLAPEYRON

En una masa de aire saturado de vapor de agua sabemos que la variación de la tensión de saturación en función de la variación de temperatura viene determinada por la ecuación de Clausius-Clapeyron, de la forma:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{L}{(V_v - V_{e,s}) T}$$

donde:

- L : calor latente de condensación o sublimación.
- V_v : volumen del vapor.
- $V_{e,s}$: volumen del líquido o sólido.
- T : temperatura absoluta.

Es evidente que en la condensación y en la sublimación:

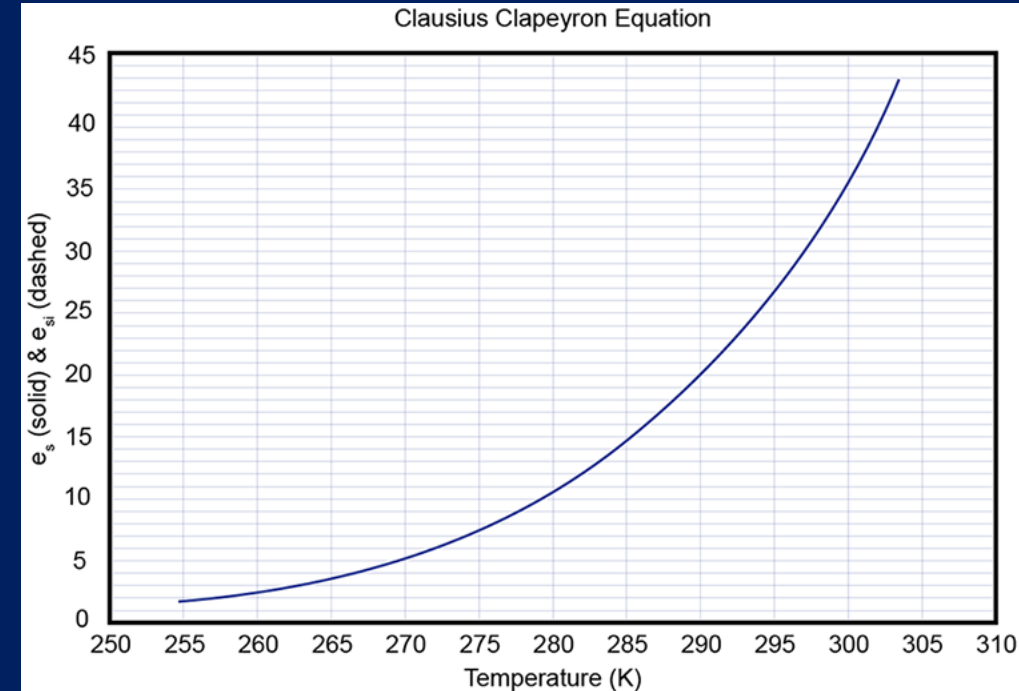
$$V_v \gg V_{e,s}$$

Lo que permite introducir una simplificación en la ecuación de Clausius, resultando:

$$\frac{dE}{dT} \approx \frac{L}{V_v T}$$

Suponiendo un comportamiento del vapor como el de un gas perfecto, llegamos a esta expresión, también aproximada:

$$\frac{1}{V_v} = \frac{E}{R' T}$$



de donde resulta:

$$\frac{dE}{dT} \approx \frac{LE}{R'T^2}$$

Para variaciones pequeñas de temperatura se puede calcular la variación de la tensión (E) haciendo la aproximación por el método de diferencias finitas, de tal modo que la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\frac{\Delta E}{\Delta T} \approx \frac{LE}{R'T^2}$$

Para variaciones mayores de temperatura es necesario integrar la ecuación diferencial. La integración más sencilla es suponer $L = \text{cte}$, dándole un valor medio en el intervalo de temperaturas considerado, así resulta:

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{\bar{L}}{R'} \left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right]$$

Hay que señalar que incluso integrando la ecuación diferencial de Clausius teniendo en cuenta las variaciones de L no se llega a resultados tan exactos como los dados por la fórmula empírica de Magnus:

$$E = E_0 \times 10^{\frac{at}{b+t}} \text{ mb}$$

$$E_0 = 6,10 \text{ mb (para } t = 0^\circ \text{C)}$$

siendo:

$$\begin{aligned} a &= 7,4475 \\ b &= 234,07^\circ \text{C} \end{aligned}$$

Por otra parte, para el calor latente de cambio de fase se han encontrado expresiones bastante aceptables, y así en el caso de la vaporización:

$$L_v = L_0 - 0,56t \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$$

Donde t viene en grados Celsius y $L_0 = 597,3 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

En cambio, la variación del calor latente de sublimación con la temperatura es bastante pequeña, lo que justifica que en la práctica se toma como un valor constante, así resulta:

$$L_s \approx 675 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$$

Análogamente, se llega a una fórmula que nos relaciona el calor latente de la congelación con la temperatura, obteniéndose la expresión utilizada en la práctica:

$$L_f = L_0 + 0,6t$$

Donde t viene en grados Celsius y para $t = 0^\circ \text{C}$, $L_0 = 79,63 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

2. PUNTO DE ROCIO

Sabemos que el punto de rocío de una masa de aire húmedo es la temperatura de saturación alcanzada por enfriamiento isobárico.

Una forma de calcular el punto de rocío de una masa de aire es mediante la ecuación de Clausius integrada. Así tenemos:

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{\bar{L}}{R'} \left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right]$$

Ahora bien, para masas de aire no saturadas podemos introducir la aproximación siguiente:

$$\ln \frac{E(T_d)}{E(T)} \approx \frac{\bar{L}}{R'} \left[\frac{1}{T_d} - \frac{1}{T} \right]$$

Despejando $\frac{1}{T_d}$ resulta:

$$\frac{1}{T_d} \approx \frac{1}{T} + \frac{R'}{\bar{L}} \ln \frac{E(T_d)}{E(T)}$$

O también:

$$\frac{1}{T_d} \approx \frac{1}{T} + \frac{R'}{\bar{L}} \ln \frac{100}{h}$$

luego:

$$T_d \approx \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{R'}{\bar{L}} \ln \frac{100}{h}} \approx \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{0,11}{600} \ln \frac{100}{h}}$$

Fórmula suficientemente precisa para el cálculo del punto de rocío en la práctica.

3. NIVEL DE CONDENSACION

Para calcular analíticamente la altura a la cual una masa de aire ascendente alcanza la saturación (z_s) existen algunas expresiones aproximadas, que deben usarse con precaución. En efecto, en primer lugar el gradiente α debe ser muy próximo al gradiente adiabático para que exista una vía adiabática de ascenso.

La fórmula más extendida es la de Schubert o Ferrel, que es:

$$z_s \approx 122(T_0 - T_{a0}) \text{ mgp}$$

Väisälä deduce otra fórmula a partir de la empírica de Magnus para el cálculo analítico del nivel de condensación, que en forma simplificada es:

$$z_s = 188(t_0 + 105) \frac{x}{x + 5,1} \text{ mgp}$$

donde:

$$x = \log \frac{100}{h_0}$$

4. ECUACION DE LA PSEUDOADIABATICA

Si la masa de aire continúa ascendiendo por encima del nivel de condensación, el descenso de temperatura por expansión adiabática es aminorado por el calor latente de condensación liberado.

Se pueden elegir varias formas de evolución de esta masa de aire saturado. Por ejemplo, si queremos que la evolución sea isentrópica debemos suponer que la masa de aire ascendente arrastre con ella las gotitas que se van condensando. Esta evolución isentrópica, aunque más exacta, es de una mayor complejidad, y en Meteorología se ha escogido otro tipo de evolución más simple que es la vía pseudoadiabática; en ella se supone que las gotitas formadas se separan de la masa de aire ascendente (por lo que hay una pérdida de entropía), y además se favorece un mayor enfriamiento y se activa la condensación. La ecuación termodinámica de una evolución pseudoadiabática viene dada por la ecuación diferencial:

$$(C_p + M \cdot C) \frac{dT}{T} - R d \ln(p - E) + d \frac{ML}{T} = 0$$

En la práctica, y como el valor de $MC \ll C_p$ es suficiente tomar la ecuación en la forma

$$C_p \frac{dT}{T} - R d \ln(p - E) + d \frac{ML}{T} = 0$$

que integrada nos da:

$$C_p \ln T - R \ln(p - E) + \frac{ML}{T} = \text{cte}$$

Por cada punto (P, T) de un diagrama termodinámico pasan infinitas adiabáticas saturadas (según el valor que demos al contenido en agua líquida). Sin embargo, sólo pasa una línea pseudoadiabática, que coincide con la adiabática saturada que alcance en ese punto su nivel de condensación. Esta ha sido la principal causa de elegir la vía pseudoadiabática en Meteorología.

5. GRADIENTE PSEUDODIABATICO

Evidentemente el calor cedido por condensación por la unidad de masa de aire ascendente se puede poner en la forma aproximada:

$$-LdM \simeq C_p dT - Vdp$$

que en primera aproximación podemos poner:

$$-LdM \simeq C_p dT + g dz$$

De otra parte:

$$\frac{dM}{M} \simeq d \ln \left(\frac{E}{p} \right) = \frac{dE}{E} - \frac{dp}{p}$$

o bien:

$$\frac{dM}{M} \simeq \frac{dE}{E} + \frac{g dz}{RT}$$

sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$-LM \left(\frac{dE}{E} + \frac{g dz}{RT} \right) \simeq C_p dT + g dz$$

Operando en esta ecuación se deduce que:

$$\Gamma = - \frac{dT}{dz} \simeq \frac{g \left(1 + \frac{LM}{RT} \right)}{C_p + \frac{LM}{E} \frac{dE}{dT}}$$

y teniendo en cuenta que:

$$M \simeq \epsilon \frac{E}{p}$$

resulta:

$$\Gamma = \frac{g}{C_p} \frac{p + \epsilon \frac{LE}{RT}}{p + \epsilon \frac{L}{C_p} \frac{dE}{dT}} \simeq \gamma \frac{p + \epsilon \frac{LE}{RT}}{p + \epsilon \frac{L}{C_p} \frac{dE}{dT}}$$

Para su uso práctico, Morán propone una simplificación basada en la ecuación aproximada de Clausius:

$$\frac{dE}{dT} \approx \frac{EL}{R'T^2}$$

Y resulta finalmente:

$$\Gamma = \gamma \frac{p + \frac{\varepsilon L}{RT} E}{p + \frac{2}{7} \left(\frac{\varepsilon L}{RT} \right)^2 E} \quad \text{siendo} \quad \varepsilon = \frac{R}{R'} = 0,622$$

Fórmula mucho más cómoda para su empleo en los cálculos prácticos.

6. TEMPERATURA PSEUDOPOTENCIAL EQUIVALENTE

Recibe este nombre el valor que tomaría la temperatura potencial de una masa de aire seco cuando éste absorbiera por vía reversible la entropía desprendida por el vapor al condensarse isotérmicamente.

En general, y si la masa de aire no está saturada, se expansiona adiabáticamente hasta la saturación y luego se condensa precisamente a la temperatura T_s de saturación, es decir:

$$\theta_{ps} = T \left(\frac{1.000}{p - e} \right)^{\frac{R}{C_p}} e^{\frac{L \cdot M}{C_p \cdot T_s}}$$

Por otra parte, la temperatura pseudoequivalente es la que toma una masa de aire al volver a su presión inicial después de haber absorbido por vía pseudoadiabática el calor de condensación de todo el vapor de agua contenido en esa masa de aire. Luego:

$$T_{ps} = T \cdot e^{\frac{L \cdot M}{C_p \cdot T_s}}$$

Debe hacerse notar que la temperatura pseudoequivalente es ligeramente mayor que la temperatura equivalente, al definirse ésta por la expresión:

$$T_e = T + \frac{L \cdot M}{C_p}$$

Una masa de aire húmedo tiene tensión de vapor de 17,04 mb y una temperatura de 20° C. Sabiendo que la tensión saturante a 20° C es 23,38 mb, determinar la humedad relativa y el punto de rocío.

La humedad relativa se calcula inmediatamente, ya que:

$$h = 100 \frac{e}{E}$$

luego:

$$h = 100 \frac{17,04 \text{ mb}}{23,38 \text{ mb}} = \underline{73 \%}$$

El punto de rocío se puede determinar partiendo de la ecuación de Clausius-Clapeyron. En efecto:

$$\ln \frac{E}{e} \approx \frac{L}{R'} \left(\frac{1}{T_d} - \frac{1}{T} \right)$$

Despejando, resulta:

$$\frac{1}{T_d} \approx \frac{1}{T} + \frac{R'}{L} \ln \frac{E}{e}$$

de donde:

$$T_d = \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{R'}{L} \ln \frac{E}{e}} \approx \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{R'}{L} \ln \frac{100}{h}}$$

luego:

$$T_d = \frac{1}{\frac{1}{293 \text{ K}} + \frac{0,1102 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}{600 \text{ cal g}^{-1}} \ln \frac{100}{73}} = \underline{288 \text{ K}}$$

Calcular el cambio que experimenta la tensión saturante del vapor de agua si la temperatura experimenta un aumento de 8°C , pasando de 5°C a 13°C . Datos: $E(5^{\circ}\text{C}) = 8,73 \text{ mb}$.

Partimos de la ecuación diferencial de Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dE}{E} = \frac{L}{R'} \frac{dT}{T^2}$$

La integramos para $L = \text{cte}$, tomando un valor medio:

$$L = L_0 - 0,56 t(^{\circ}\text{C}) = 597 \text{ cal g}^{-1} - 0,56 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 9^{\circ}\text{C} = 592 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$$

Luego integrando la ecuación de Clausius:

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{\bar{L}}{R'} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

es decir:

$$E = E_0 e^{\frac{\bar{L}}{R'} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

y en este caso:

$$E = 8,73 \text{ mb } e^{\frac{592 \text{ cal g}^{-1}}{0,11 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}} \left(\frac{1}{278 \text{ K}} - \frac{1}{286 \text{ K}} \right)} = \underline{15 \text{ mb}}$$

Una nube saturada de vapor experimenta un incremento de temperatura de 4°C a 10°C . En el proceso, parte de las gotitas de la nube se evaporan para mantener el ambiente saturado. Determinar el nuevo valor de la tensión de vapor, sabiendo que a 4°C E vale $8,14\text{ mb}$.

Este problema se puede resolver mediante la ecuación integrada de Clausius-Clapeyron. En efecto:

$$L = L_0 - 0,56 t = 597\text{ cal g}^{-1} - 0,56\text{ cal g}^{-1}\text{ grad}^{-1} 7^{\circ}\text{C} = 593\text{ cal g}^{-1}$$

luego:

$$\frac{dE}{E} = \frac{\bar{L}}{R'} \frac{dT}{T^2}$$

Integrando:

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{\bar{L}}{R'} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

es decir:

$$E = E_0 e^{\frac{\bar{L}}{R'} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

y, por tanto:

$$E = 8,14\text{ mb } e^{0,11 \frac{\text{cal g}^{-1}}{\text{cal g}^{-1}\text{ grad}^{-1}} \left(\frac{1}{277\text{ K}} - \frac{1}{283\text{ K}} \right)} = \underline{12,3\text{ mb}}$$

Otra forma de resolverlo es aplicando la fórmula de Magnus:

$$E = E_0 \times 10^{\frac{at}{b+t}}$$

Con:

$$E_0 = 6,10\text{ mb para } t = 0^{\circ}\text{C}$$

$$a = 7,4475$$

$$b = 234,07^{\circ}\text{C}$$

luego:

$$E = 6,1 \times 10^{\frac{7,4475 \times 10}{234,07 + 10}} = \underline{12,32\text{ mb}}$$

Por tanto:

Para $t = 10^{\circ}\text{C}$ resulta $E = 12,32\text{ mb}$ con la fórmula de Magnus, lo que representa un valor más exacto que el calculado por la ecuación de Clausius-Clapeyron.

Una masa de aire húmedo tiene una temperatura de 20° C, una presión de 1.012 mb y una humedad relativa del 70 por 100 y se supone que asciende adiabáticamente. Determinar al primer nivel y al nivel de condensación la tensión de vapor, el punto de rocío y la proporción de mezcla.

Dato: $E(20^\circ \text{ C}) = 23,38 \text{ mb}$.

a) En el primer nivel:

La tensión de vapor será:

$$e = \frac{E \cdot h}{100} = 23,38 \text{ mb} \frac{70}{100} = \underline{16,37 \text{ mb}}$$

El punto de rocío:

$$Td \approx \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{R'}{L} \ln \frac{100}{h}} = \frac{1}{\frac{1}{293 \text{ K}} + \frac{0,1102 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}{600 \text{ cal g}^{-1}} \ln \frac{100}{70}} = 287,5 \text{ K} = \underline{15,5^\circ \text{ C}}$$

y la proporción de mezcla:

$$m = 0,622 \frac{e}{p - e} = 0,622 \frac{16,37 \text{ mb}}{1,012 \text{ mb} - 16,37 \text{ mb}} = \underline{10,2 \times 10^{-3} \text{ g/g}}$$

b) El nivel de condensación lo calculamos por la fórmula de Ferrel y resulta:

$$z_s = 122(T_0 - T_{d0}) = 550 \text{ mgp}$$

El punto de rocío en una elevación adiabática sufre una disminución de $\frac{1}{6}$ por hectómetro, luego:

$$T_s = T = Td = 5,5 \text{ hm} \times \frac{1}{6} \text{ hm}^{-1} \times 15,5^\circ \text{ C} = \underline{14,2^\circ \text{ C}}$$

Luego la presión será:

$$p = p_0 \left(\frac{T_s}{T_0} \right)^{3,511} = 1,012 \text{ mb} \left(\frac{287,2 \text{ K}}{293 \text{ K}} \right)^{3,511} = 943,4 \text{ mb}$$

Como la proporción de mezcla es constante en la evolución tendremos:

$$M_s = m = \underline{10,2 \times 10^{-3} \text{ g/g}}$$

y la tensión de vapor:

$$M_s = 0,622 \frac{E}{p - E} = m$$

luego:

$$E = p \frac{m}{0,622 + m} = \underline{15,22 \text{ mb}}$$

Calcular el punto de rocío y la humedad relativa en el nivel inicial, sabiendo que el nivel de condensación por ascenso adiabático de la masa de aire se encuentra a 1.800 m. La temperatura en el nivel de partida es de 12° C.

El método más rápido, aunque aproximado, del cálculo del punto de rocío es mediante la fórmula de Schubert o Ferrel, luego:

$$z_s = 122(T_0 - Td_0)$$

Y en nuestro caso será:

$$Td_0 = T_0 - \frac{z_s}{122} = 285 - \frac{1800}{122} = 270 \text{ K} = \underline{-3^\circ \text{C}}$$

La humedad relativa puede calcularse de la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$\frac{1}{T_{d0}} \approx \frac{1}{T} + \frac{R'}{L} \ln \frac{100}{h}$$

Luego:

$$\frac{100}{h} = e^{\frac{L}{R'} \left(\frac{1}{T_{d0}} - \frac{1}{T_0} \right)} = 2,9$$

Es decir:

$$h = \frac{100}{2,9} = \underline{34,5\%}$$

Otro método consistiría en la aplicación de la fórmula de Väissälä, que nos permite obtener la humedad relativa sin conocer el punto de rocío.

Sabemos que la temperatura pseudopotencial de una masa de aire húmedo es 30°C , su temperatura es 25°C , mientras que la temperatura efectiva de esta masa de aire en su nivel de condensación es de 0°C . Calcular la proporción de mezcla.

La ecuación de la temperatura pseudopotencial de una masa de aire húmedo es:

$$\theta_{ps} = T \left(\frac{1.000}{p - e} \right)^{\frac{R}{c_p}} e^{\frac{mL}{c_p T}}$$

Luego:

$$\theta_{ps} = \theta e^{\frac{mL}{c_p T}}$$

Por tanto, despejando m de la ecuación anterior se obtiene:

$$m = \frac{C_p T_c}{L} \ln \frac{\theta_{ps}}{\theta}$$

y en este caso:

$$m = \frac{0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 273 \text{ K}}{600 \text{ cal g}^{-1}} \ln \frac{303 \text{ K}}{298 \text{ K}} = \underline{\underline{1,82 \times 10^{-3} \text{ g/g}}}$$

En un proceso de enfriamiento isobárico por radiación en una masa de aire saturado se produce la condensación de 1,5 g de vapor por m³ de aire. Sabiendo que inicialmente la temperatura era de 285 K, calcular la temperatura al final del proceso.

La humedad absoluta de la masa saturada será inicialmente:

$$A = 216,9 \frac{E}{T} = 216,9 \frac{14,01}{285} = 10,7 \text{ g m}^{-3}$$

Diferenciando la ecuación logarítmica de la humedad absoluta resulta:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dE}{E} - \frac{dT}{T}$$

Sustituyendo el primer término del segundo miembro por la ecuación de Clausius-Clypeyron tenemos:

$$\frac{dA}{A} = \frac{LdT}{R'T^2} - \frac{dT}{T} = dT \left(\frac{L}{R'T^2} - \frac{1}{T} \right)$$

Pasando a diferencias finitas:

$$\frac{\Delta A}{A} \simeq \Delta T \left(\frac{L}{R'T^2} - \frac{1}{T} \right)$$

Luego:

$$-\frac{1,5 \text{ g m}^{-3}}{10,7 \text{ g m}^{-3}} \simeq \Delta T \left(\frac{600 \text{ cal g}^{-1}}{0,11 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1} (285 \text{ K})^2} - \frac{1}{285 \text{ K}} \right)$$

de donde:

$$\Delta T \simeq -2,2 \text{ grad}$$

Luego la temperatura final será:

$$T_f = 285 - 2,2 = 282,8 \text{ K} \simeq \underline{283 \text{ K}}$$

Una masa saturada asciende por vía pseudoadiabática desde el nivel de 700 mb y 0° C de temperatura hasta 650 mb. Sabiendo que se condensa en el proceso $7,3 \times 10^{-4}$ g/g de proporción de mezcla, calcular el descenso de temperatura que tiene lugar.

Sabemos que el cambio de temperatura asociado a un proceso de expansión pseudoadiabática se puede expresar por:

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} - \frac{L}{T \cdot C_p} dM$$

Para una evolución pequeña podemos aproximar a diferencias finitas y resulta:

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{R}{C_p} \frac{\Delta p}{p} - \frac{L}{T C_p} \Delta M$$

Luego:

$$\frac{\Delta T}{273 \text{ K}} \simeq \frac{0,0685 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}{0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}} \times \frac{(-50 \text{ mb})}{700 \text{ mb}} - \frac{600 \text{ cal g}^{-1} \times (-7,3 \times 10^{-4} \text{ g/g})}{273 \text{ K} \cdot 0,2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}}$$

De donde resulta:

$$\underline{\underline{\Delta T \simeq -3,7 \text{ grad}}}$$

1. LA RADIACION TERMICA ES UNA ONDA ELECTROMAGNETICA

La radiación térmica constituye una forma de propagación de calor que se diferencia abiertamente de las otras dos maneras de transmisión de la energía calorífica, conducción y convección, por dos hechos fundamentales:

- a) La no exigencia de un medio material para su aparición.
- b) La velocidad de propagación mucho mayor que en la conducción y convección.

Precisamente estos dos hechos son los que justifican la consideración del calor radiante como una onda electromagnética, al poder propagarse en el vacío y hacerlo siempre a la velocidad de la luz.

Son aplicables, pues, a la radiación térmica todas las propiedades características de las ondas electromagnéticas, de las que constituyen una fracción del espectro de longitudes de onda: la comprendida entre aproximadamente $0,1 \mu\text{m}$ y $100 \mu\text{m}$, incluyendo, pues, desde el ultravioleta hasta el infrarrojo y abarcando, por consiguiente, de un modo absoluto la zona visible del espectro.

Fue el astrónomo germano-británico William Herschel (el descubridor del planeta Urano) quien puso de manifiesto inequívocamente a comienzos del siglo XIX que el calor radiante poseía propiedades en todo análogas a las de la luz, al desplazar un termómetro a lo largo del espectro producido mediante un prisma por un sólido incandescente y llevarlo más allá de la zona roja del mismo. La radiación así producida era altamente calorífica y podía reflejarse y experimentar los fenómenos de interferencia y polarización.

La radiación térmica es, por consiguiente, la radiación electromagnética emitida por un cuerpo en cualquier estado de agregación en virtud de su temperatura.

2. ABSORCION, REFLEXION Y TRANSMISION DE LA RADIACION: EL CUERPO NEGRO

La radiación térmica al incidir sobre un cuerpo puede ser parcialmente absorbida, en parte reflejada y el resto se transmite a través del cuerpo.

Las porciones de energía correspondientes están caracterizadas por los factores de absorción (α), reflexión (ρ) y transmisión (τ), que naturalmente cumplen la relación:

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

El *cuerpo negro* se define como aquel que absorbe todas las radiaciones incidentes y, por tanto, para él: $\alpha_N = 1$, lo que supone:

$$\rho_N = \tau_N = 0$$

3. DEFINICIONES FUNDAMENTALES

a) *Flujo de energía radiante* (ϕ): Es la energía radiada por un cuerpo en la unidad de tiempo, independientemente de la composición espectral de la energía. Se designa por ϕ y su unidad en el SI es el W.

b) *Poder emisivo total* (E): Es la energía radiada por unidad de tiempo y unidad de superficie del cuerpo. Por tanto: $E = \frac{\phi}{A}$ y referida a un punto de la fuente radiante:

$$E_p = \frac{d\phi}{dA}. \text{ Su unidad en el SI es el } Wm^{-2}.$$

c) *Intensidad de emisión o poder emisivo monocromático* (E_λ): Es la energía radiante emitida a una longitud de onda dada por unidad de tiempo, unidad de superficie y unidad de intervalo de longitud de onda. En el SI se mide en Wm^{-3} , aunque en la práctica se expresa en $Wm^{-2}\mu m^{-1}$.

Por consiguiente, el poder emisivo total puede determinarse por la expresión:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda.$$

4. LEY DE KIRCHHOFF. EMISIVIDAD

Esta ley establece que la relación entre los poderes emisivos totales de dos cuerpos situados en un recinto en equilibrio térmico es igual a la relación entre sus factores de absorción, es decir:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

En consecuencia, si una de las sustancias es un cuerpo negro, como $\alpha_N = 1$, se tendrá:

$$\frac{E_1}{E_N} = \alpha_1$$

Por otra parte, la relación entre los poderes emisivos de un cuerpo y el del cuerpo negro recibe el nombre de *emisividad*, ε .

Por tanto:

$$\alpha = \varepsilon$$

donde tanto α como ε son siempre números inferiores a la unidad.

5. LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

Para un cuerpo negro esta ley establece que el poder emisivo total es directamente proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta, es decir:

$$E_N = \sigma T^4$$

donde σ es una constante de valor $5,67 \times 10^{-8} Wm^{-2} K^{-4}$.

En consecuencia, si el cuerpo radiante no es un cuerpo negro su poder emisivo total será:

$$E = \varepsilon \sigma T^4$$

donde la emisividad no es en general constante, sino que depende de la temperatura y de la naturaleza de la superficie radiante.

Al aplicar la ley de Stefan-Boltzmann al intercambio de energía radiante entre dos cuerpos a las temperaturas T_1 y T_2 debemos tener en cuenta la geometría de las superficies enfrentadas, de manera que el flujo neto de energía radiante viene dado por la expresión:

$$\phi = F_{12} A \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

donde F_{12} recibe el nombre de *factor geométrico*.

6. LEY DE PLANCK

Planck dedujo por consideraciones mecánico-cuánticas que el poder emisivo monocromático de un cuerpo negro es función de la longitud de onda y de la temperatura y viene dado por la expresión:

$$E_{\lambda N} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{C_2/\lambda T} - 1}$$

donde:

$$C_1 = 3,74 \times 10^{-16} Wm^{-2} = 3,74 \times 10^8 Wm^{-2} \mu m^{-4}$$

$$C_2 = 1,44 \times 10^{-2} m \cdot K = 1,44 \times 10^4 \mu m \cdot K$$

7. LEY DEL DESPLAZAMIENTO DE WIEN

La intensidad de emisión del cuerpo negro a cada temperatura adopta un valor máximo que puede deducirse sin más que derivar con respecto a la longitud de onda e igualar a cero en la expresión de Planck. Esto nos permite deducir la ley de Wien (obtenida empíricamente por él con anterioridad a la ley de Planck), cuya expresión es:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = B$$

donde:

$$B = 2,897 \times 10^3 \cdot \text{m} \cdot \text{K} = 2.897 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

y donde $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda que corresponde a la intensidad de emisión máxima.

Como vemos, cuanto más elevada es la temperatura del cuerpo negro menor es la longitud de onda de la radiación de intensidad máxima emitida por él.

8. ENERGIA SOLAR QUE LLEGA A LA TIERRA: CONSTANTE SOLAR

El Sol constituye la fuente primordial de energía que recibe la Tierra y puede asimilarse a un cuerpo negro cuya temperatura es de alrededor de 6.000 K. La mayor porción de energía solar está comprendida dentro del espectro visible, es decir, en el intervalo de longitudes de onda entre 0,4 μm (4.000 Å) y 0,7 μm (7.000 Å), aunque se extiende también dentro de longitudes de onda inferiores (ultravioleta) y superiores (infrarrojo).

La longitud de onda de la intensidad de emisión máxima corresponde a aproximadamente 0,5 μm (5.000 Å).

La *constante solar* constituye una medida de la intensidad de la radiación solar y se define como la energía que por la unidad de tiempo incide normalmente a una superficie unidad situada en el límite de la atmósfera terrestre cuando el Sol se encuentra a la distancia media de la Tierra. Su valor es de alrededor de 1.400 Wm^{-2} , es decir, aproximadamente 2 $\text{cal cm}^{-2} \text{min}^{-1} = 2 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}$, lo que representa una energía recibida por la totalidad del planeta de alrededor de $1,5 \times 10^{22} \text{ J} \cdot \text{día}^{-1}$.

Para percatarse de lo ingente de este valor basta considerar que se estima que en el momento actual el consumo energético de la humanidad no rebasa los $10^{21} \text{ J año}^{-1}$.

9. RADIACION TERRESTRE

La Tierra, a efectos de radiación térmica, puede considerarse como un cuerpo negro a una temperatura de alrededor de 300 K, lo que corresponde a una longitud de onda para la intensidad de emisión máxima de aproximadamente 10 μm , encontrándose la mayor parte de la radiación terrestre comprendida entre 3 μm y 50 μm . Por otra parte, algunas de las sustancias que integran la atmósfera (fundamentalmente el vapor de agua y el dióxido de carbono) no absorben la radiación solar de onda corta,

pero presentan bandas de absorción en el intervalo de longitudes de onda de la radiación terrestre. La banda de absorción del vapor de agua está comprendida entre 5 μm y 8 μm y la del dióxido de carbono entre 13,5 μm y 17 μm . Esta captación de una parte importante de la radiación procedente de la Tierra es la responsable de que las temperaturas medias de la atmósfera y la superficie terrestre sean más elevadas que la que presentaría esta última si no existiera atmósfera y el fenómeno se conoce con el nombre de *efecto invernadero*. Por otra parte, la atmósfera es completamente transparente para la radiación terrestre comprendida en el intervalo de longitudes de onda entre 8 μm y 13,5 μm , que por ello recibe el nombre de *ventana atmosférica*.

Además, y en concordancia con la ley de Kirchhoff, el vapor de agua y el dióxido de carbono atmosféricos presentan también una emisión de radiación que es parcialmente recibida por la Tierra. Brunt ha propuesto una ecuación empírica para calcular la fracción de la radiación procedente de la atmósfera que alcanza la superficie terrestre, R :

$$\frac{R}{\sigma T^4} = a + b\sqrt{e}$$

donde:

$$a = 0,44$$

$$b = 0,08 \text{ mb}^{-\frac{1}{2}}$$

T = temperatura de la superficie terrestre

e = tensión de vapor del aire en superficie expresada en mb.

Se denomina además *radiación nocturna* (R_N) a la pérdida neta de radiación procedente de la Tierra; por lo que de acuerdo con la expresión de Brunt:

$$R_N = \sigma T^4 - R = \sigma T^4 (1 - a - b\sqrt{e})$$

Expresión que, naturalmente, sólo es aplicable en condiciones de cielo despejado y representa un valor promedio.

Calcular el flujo de energía radiante emitido por la Tierra, considerada como un cuerpo negro esférico a la temperatura de 300 K y cuyo radio es 6.370 Km. ¿Cuál es el poder emisor total de la Tierra expresado en langley · min⁻¹?

Aplicando la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\Phi = \sigma AT^4 = \sigma 4\pi R^2 T^4 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} 4\pi (6.370 \times 10^2)^2 \text{ m}^2 \times 300^4 \text{ K}^4 \\ = \underline{2,34 \times 10^{17} \text{ W}}$$

El poder emisor total de la Tierra será:

$$E = \frac{\phi}{A} = JT^4 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} (300)^4 \text{ K}^4 = 459,27 \text{ W m}^{-2} = \\ = 459,27 \times \frac{1}{4,18} \times 60 \times 10^{-4} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ min}^{-1} = \underline{0,659 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}}$$

¿Cuántos $W \cdot cm^{-2}$ emite un cuerpo negro a la temperatura de $1.000^{\circ}C$? Con esta información, calcular la temperatura del Sol, sabiendo además que éste irradia $7.348 W cm^{-2}$.

Aplicando la ley de Stefan-Boltzmann:

$$E_1 = \sigma T_1^4 = 5,67 \times 10^{-12} W cm^{-2} K^{-4} \times 1.273^4 K^4 = \underline{14,9 W \cdot cm^{-2}}$$

Para el Sol:

$$E_{Sol} = \sigma T_{Sol}^4 = 7.348 W \cdot cm^{-2}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{T_{Sol}^4}{T_1^4} = \frac{7.348}{14,9}$$

de donde:

$$T_{Sol} = 1.273 \left(\frac{7.348}{14,9} \right)^{1/4} K = \underline{5.999 K}$$

El Sol puede considerarse como un cuerpo negro a temperatura de 6.000 K.
Determinar:

- La longitud de onda correspondiente a la intensidad de emisión máxima de la radiación solar.
- La energía emitida a esta longitud de onda.

a) Aplicando la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2.897 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

por tanto:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.897}{6.000} \mu\text{m} = 0,48 \mu\text{m} = \underline{4.800 \text{ \AA}} \quad \cdot 10^3 \mu\text{m}$$

b) Según la ley de Planck:

$$D_{\lambda N} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{C_2/\lambda T} - 1}$$

siendo:

$$C_1 = 3,74 \times 10^8 \text{ W m}^{-2} \mu\text{m}^4$$

$$C_2 = 1,44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} E_{\lambda N} &= \frac{3,74 \times 10^8}{0,48^5} \times \frac{1}{e^{1,44 \times 10^4 / (2,897 \times 10^3)} - 1} = \\ &= \frac{3,74 \times 10^8}{2,548 \times 10^{-2}} \times \frac{1}{e^{4,97} - 1} = \underline{1,026 \times 10^8 \text{ W m}^{-2} \mu\text{m}^{-1}} \end{aligned}$$

Calcular la temperatura de la superficie del Sol, considerado como un cuerpo negro esférico de 7×10^8 km de radio, suponiendo que la Tierra describe una órbita circular a su alrededor de $1,5 \times 10^8$ km de radio y sabiendo que el valor de la constante solar es de $2 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}$.

$$\begin{aligned} S_0 = \frac{\phi}{A} &= \frac{\sigma 4\pi R^2 T^4}{4\pi D^2} = 2 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{2 \times 4,18}{60} \times 10^4 \text{ W m}^{-2} = 1,4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2} \\ &= \\ &= \frac{\sigma R^2}{D^2} T^4 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \times \frac{(7 \times 10^8)^2 \text{ m}^2}{(1,5 \times 10^{11})^2 \text{ m}^2} T^4 \end{aligned}$$

de donde:

$$T^4 = 1.133,78 \times 10^{12} \text{ K}^4$$

y

$$\underline{T = 5.802 \text{ K}}$$

El valor de la constante solar es $2,0 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}$, obtenido al tomar el Sol como un cuerpo negro a la temperatura de 6.000 K . ¿Cuál sería la temperatura de equilibrio de radiación de la Tierra en ausencia de atmósfera si su superficie recibiera $0,5 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}$ de radiación solar? ¿Cuál sería la temperatura de la superficie del Sol en estas condiciones?

a) El poder emisivo de la Tierra tiene que ser igual al recibido del Sol para alcanzar el equilibrio, luego:

$$E_T = \frac{\Phi_T}{A} = \sigma T_e^4$$

es decir:

$$0,5 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{0,5 \times 4,18 \times 10^4}{60} \text{ W m}^{-2} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} T_e^4$$

y por tanto:

$$T_e^4 = \frac{0,5 \times 4,18 \times 10^4}{60 \times 5,67 \times 10^{-8}} \text{ K}^4 \quad \text{y} \quad T_e = \underline{280 \text{ K}}$$

b) El valor de la constante solar se obtiene:

$$S_0 = \frac{\phi_s}{A} = \frac{\sigma 4\pi R_s^2 T_s^4}{4\pi D^2}$$

Si la constante solar tuviera el valor S'_0 :

$$S'_0 = \frac{\phi'_s}{A} = \frac{\sigma 4\pi R_s^2 T_s'^4}{4\pi D^2}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{S_0}{S'_0} = \frac{T_s^4}{T_s'^4}$$

es decir:

$$T_s'^4 = \frac{S'_0}{S_0} T_s^4 \quad \text{y} \quad T_s' = T_s \left(\frac{S'_0}{S_0} \right)^{1/4}$$

y en este caso:

$$T_s' = 6.000 \text{ K} \left(\frac{0,5 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}}{2 \text{ langley} \cdot \text{min}^{-1}} \right)^{1/4} = \frac{6.000}{\sqrt{2}} \text{ K} = \underline{4.242,6 \text{ K}}$$

Tabla I
CONSTANTES METEOROLOGICAS

Masa molecular media del aire seco	$M = 28,9644 \text{ g/mol}$
Masa molecular del agua	$M' = 18,016 \text{ g/mol}$
Calor específico a presión constante del aire seco	$c_p = 0,2405 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
Calor específico a volumen constante del aire seco	$c_v = 0,1719 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
Calor específico a presión constante del vapor de agua	$c'_p = 0,444 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$
Constante universal de los gases referida al aire seco	$R = 0,0685 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$ $R = 286,8 \text{ J/kg} \cdot \text{grad}$
Constante universal de los gases referida al vapor de agua ...	$R' = 0,1102 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$ $R' = 461 \text{ J/kg} \cdot \text{grad}$
Calor latente de vaporización del agua a 0° C	$L_v = 597,3 \text{ cal/g}$
Calor latente de fusión del agua a 0° C	$L_f = 79,63 \text{ cal/g}$
Calor latente de sublimación a 0° C	$L_s = 675 \text{ cal/g}$

Tabla II
CONSTANTES GEOFISICAS

Radio de la Tierra (Ecuatorial)	$R_e = 6,37839 \times 10^6 \text{ m}$
Radio de la Tierra (polar)	$R_p = 6,35691 \times 10^6 \text{ m}$
Area de la Tierra	$A_t = 5,101 \times 10^{17} \text{ m}^2$
Volumen de la Tierra	$V_T = 1,083 \times 10^{22} \text{ m}^3$
Aceleración de la gravedad en el Ecuador	$g_E = 9,78049 \text{ m/s}^2$
Aceleración de la gravedad a 45° de latitud	$g_{45^\circ} = 9,80629 \text{ m/s}^2$
Aceleración de la gravedad al nivel del mar en función de la latitud	$g_\varphi = g_E (1 + 0,000052884 \text{ sen}^2 \varphi - 0,000000059 \text{ sen}^2 2\varphi) \text{ m/s}^2$
Velocidad angular de la Tierra	$\omega = 7,2921159 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
Distancia media de la Tierra al Sol	$D = 149,5 \times 10^6 \text{ km}$
Velocidad media de la Tierra en su órbita alrededor del Sol	$v_T = 29,8 \text{ km/s}$