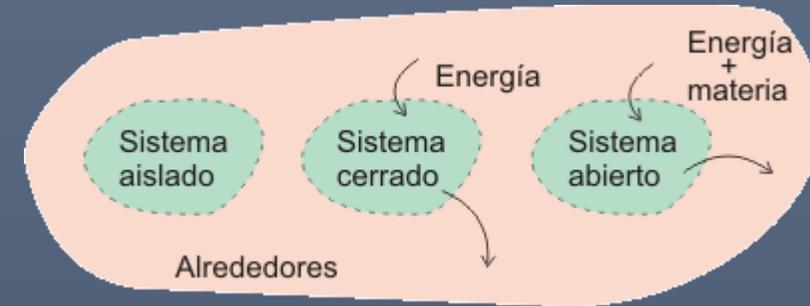


# Aspectos básicos de Termodinámica II

Fase Presencial Curso PIB-M 2022



- Sistema: Porción finita de materia en el seno de un medio exterior o entorno
  - Abierto: intercambia materia y energía con el exterior
  - Cerrado: no intercambia materia con el exterior (puede intercambiar energía)
  - Aislado: no intercambia materia ni energía con el exterior.



- En el estudio desde el punto de vista termodinámico de la atmósfera en general se consideran sistemas cerrados (si no hay intercambio de calor son procesos adiabáticos)
- Su estado lo definen distintas propiedades, extensivas (dependen de la masa) o intensivas (no dependen de ella). Si no varían con el tiempo se trata de un estado de equilibrio (equilibrio mecánico, térmico y material).
- **Principio 0 de la termodinámica:** Dos sistemas en contacto a través de una pared diatérmica durante un tiempo prolongado alcanzan el equilibrio térmico. Si un cuerpo A está en equilibrio térmico con un cuerpo B, y B lo está con C, A está en equilibrio térmico con C. Aplicación a termómetros:  $t = aX + b$
- La descripción del estado de un sistema desde el punto de vista termodinámico se realiza mediante los valores de determinadas propiedades macroscópicas denominadas variables termodinámicas, tales como  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $m$ , ...
- No todas son independientes. Variables de estado (independientes)
- Función de Estado: combinación de variables de estado

**Gases ideales o de Avogadro:** Verifican las siguientes leyes:

- La energía interna es función de la temperatura

- **Ley de Boyle-Mariotte**

A Temperatura constante, el Volumen ocupado por el gas es inversamente proporcional a la presión del mismo:

$$PV=C_1$$

- **Ley de Gay-Lussac:**

A presión constante, el volumen es directamente proporcional a la temperatura  $V/T=C_2$

Combinando ambas se obtiene la ecuación de estado de los gases ideales:

$$pV = nR^+T \quad \longrightarrow \quad pV = \frac{m}{M}R^+T \quad pV = mRT$$

Donde  $R^+$  es la constante universal de los gases = 8,3143 J/mol K= 1,986 cal/mol K.

Se obtiene, de acuerdo con el [principio de Avogadro](#), sabiendo que, para  $T=273.15$  K y  $p=1$  atm, el volumen de un mol de un gas ideal es 22.4125 l. n es el número de moles, m la masa y M la masa molecular

Para un gas determinado y utilizando la constante del gas ( $R=R^+/M$ ) y la definición de densidad ( $\rho=m/V$ ) la expresión queda:

$$pV = mRT$$

$$p = \rho RT$$

Qué volumen ocupa 1 mol de gas ideal a una temperatura de 0 °C y una presión de 1 atm.  
A partir de la ecuación de estado del gas ideal:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1,0 \text{ mol})[0,082 \text{ (atm.l)/(mol.K)}](273,15 \text{ K})}{1,0 \text{ atm}} = 22,4 \text{ l}$$

Un gas tiene un volumen de 2 l, una temperatura de 30 °C y una presión de 1atm. Se calienta a 60 ° C y al mismo tiempo se comprime hasta un volumen de 1,5 l. ¿Cuál es su nueva presión?

*Como la cantidad de gas es constante,*

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

*Despejando  $P_2$ ,*

$$P_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1 V_2} P_1$$

*Poniendo las temperaturas en K resulta,  $P_2 = 1,47 \text{ atm}$ .*

## Ley de Dalton. Mezcla de gases

Si se tiene una mezcla de gases ideales a la temperatura  $T$ , la presión  $p$  y ocupando un volumen  $V$  y se llama  $n_1, n_2, \dots$  al número de moles de cada especie, la ecuación de estado aplicada al conjunto:

$$pV = (n_1 + n_2 + \dots)R^+T = \sum n_i R^+T \quad \text{que puede escribirse en la forma:}$$

$$p = \frac{n_1 R^+ T}{V} + \frac{n_2 R^+ T}{V} + \dots = \sum \frac{n_i R^+ T}{V}$$

Cada uno de los términos del segundo miembro representa la presión que el gas correspondiente ejercería si estuviera por sí sólo ocupando el volumen total de la mezcla y se denomina *presión parcial*, es decir:

$$p_i = \frac{n_i R^+ T}{V}$$

$$p = p_1 + p_2 + \dots = \sum p_i$$

que es la expresión de la **ley de Dalton**

$$pV = (n_1 + n_2 + \dots)R^+T = \sum n_i R^+T$$

Teniendo en cuenta que

$$n_i = \frac{m_i}{M_i}$$

$m_i$ : masa de cada gas  
 $M_i$ : masa molecular de cada gas

y la constante específica de cada gas,  $R_i$ ,

$$R_i = \frac{R^+}{M_i}$$

se tiene:

$$pV = \left(\sum m_i R_i\right)T$$

$$\bar{R}$$

$$\sum m_i R_i = m \bar{R}$$

ecuación de estado de una mezcla de gases perfectos

$$pV = m \bar{R}T$$

El arie seco tiene un peso molecular de 28.964 g/mol. La constante específica para el aire seco por tanto es : 287.1 J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

En el caso del vapor de agua la constante específica es 461.908 J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

- **Primer principio de la Termodinámica.** Energía interna U. Función de estado. Conservación de la energía. La variación de la energía interna del sistema es igual a la cantidad de calor dada al sistema menos la cantidad de trabajo realizado por el mismo (la energía se toma positiva si se añade al sistema y negativa si se retrae del mismo)

$$d' Q = dU + pdV$$

- **Segundo principio de la termodinámica.** Aumento de la entropía ( $dS = dQ/T$ ). En un sistema cerrado y adiabático la entropía solo puede crecer.

$$dS \geq \frac{d' Q}{T}$$

reversible



$$d' Q = TdS$$

$$TdS = dU + pdV$$

Considérese un proceso por el que un gas ideal pasa de un estado inicial  $i$  a otro final  $f$ . Calcula el trabajo termodinámico si el proceso es: a) isóbaro, b) isócoro y c) isoterma.

a) *Isóbaro*

*Si la presión es constante,*

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P(V) dV = P(V_i - V_f)$$

*que se corresponde, en módulo con el área encerrada en el rectángulo que se muestra en la figura.*

b) *Isócoro*

*Si en el proceso se mantiene el volumen constante, el trabajo realizado por el sistema es nulo,  $W = 0$ .*

c) *Isoterma*

*Utilizando la ecuación de estado del gas ideal:*

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P(V) dV = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_i}{V_f}$$

Un gas se comprime a una presión constante de 0.8 atm de 9 l. a 2 l. En el proceso, 400 J de energía salen del gas por calor. (a) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el gas? (b) ¿Cuál el cambio en su energía interna?

$$\text{P20.28} \quad (\text{a}) \quad W = -P\Delta V = -(0.800 \text{ atm})(-7.00 \text{ L})(1.013 \times 10^5 \text{ Pa/atm})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{L}) = \boxed{+567 \text{ J}}$$

$$(\text{b}) \quad \Delta E_{\text{int}} = Q + W = -400 \text{ J} + 567 \text{ J} = \boxed{167 \text{ J}}$$

Un gas ideal inicialmente a 300 K experimenta una expansión isobárica a 2.50 kPa. Si el volumen aumenta de 1 m<sup>3</sup> a 3 m<sup>3</sup> y 12.5 kJ se transfieren al gas por calor, ¿cuáles son (a) el cambio de su energía interna y (b) su temperatura final?

$$\text{P20.35} \quad (\text{a}) \quad \Delta E_{\text{int}} = Q - P\Delta V = 12.5 \text{ kJ} - 2.50 \text{ kPa}(3.00 - 1.00) \text{ m}^3 = \boxed{7.50 \text{ kJ}}$$

$$(\text{b}) \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$
$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{3.00}{1.00} (300 \text{ K}) = \boxed{900 \text{ K}}$$

**Entalpia.** Función de estado  $H = U + pV$   $dH = dU + p dV + V dp$

$$dQ = dU + pdV$$

$$dH = dQ + V dp$$

Expresión del primer principio de la termodinámica:

$$dU = \delta Q - p dV$$

$$dH = \delta Q + V dp$$

### Capacidad calorífica y calor específico

Es la relación entre la cantidad de calor y la variación de temperatura de un sistema a lo largo de una transformación elemental

Si la transformación es a volumen constante, teniendo en cuenta la definición de energía interna:

$$C_V = \frac{\delta Q_V}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

o

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

Si la transformación es a presión constante, teniendo en cuenta la definición de entalpía:

$$C_p = \frac{\delta Q_p}{dT} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

y

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

# El primer principio de la termodinámica se puede expresar en función de los calores específicos

Teniendo en cuenta la ecuación de estado y la definición de entalpía:

$H = U + pV = U + R^*T$ , derivando respecto a la temperatura:

$$dH/dT = dU/dT + R^* \quad dH/dT - dU/dT = R^*$$

$$C_p - C_v = R^* \quad c_p - c_v = R$$

$$C_p = \frac{\delta Q_p}{dT} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

y

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

$$C_v = \frac{\delta Q_v}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$$

o

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

$$\text{Gas monoatómico: } C_v = \frac{3}{2} R^*; \quad C_p = C_v + R^* = \frac{5}{2} R^*$$

$$\text{Gas diatómico: } C_v = \frac{5}{2} R^*; \quad C_p = \frac{7}{2} R^*$$

$$dQ = dU + p dv$$

$$dQ = c_v dT + p dv$$

$$dQ = c_p dT - v dp$$

$$p dv + v dp = R dT$$

Definamos los coeficientes  $\chi$  y  $\eta$  como

$$\chi = R^*/C_p = R/c_p; \quad \eta = C_p/C_v = c_p/c_v$$

Para el aire seco, que es una mezcla de gases diatómicos (si se desprecia una pequeña proporción de Ar, CO<sub>2</sub> y componentes secundarios) de proporción constante, se tienen los siguientes valores

$$\chi_d = 2/7 = 0,286; \quad \eta_d = 7/5 = 1,400$$

$$c_{v,d} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 171 \text{ cal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$c_{p,d} = 1.005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 240 \text{ cal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

A un gramo de aire, sometido a una presión de 1.010 mb y a una temperatura de 10° C, se le aportan 6 calorías; simultáneamente la presión desciende en 40 mb. Calcular la variación de temperatura que experimentará la masa de aire seco.

$$\delta Q = C_p dT - V dp$$

o bien:

$$\delta Q = C_p dT - RT \frac{dp}{p}$$

Pasando a diferencias finitas:

$$Q \simeq C_p \Delta T - RT \frac{\Delta p}{p}$$

Despejando:

$$\Delta T \simeq \frac{Q + RT \frac{\Delta p}{p}}{C_p}$$

Luego:

$$\Delta T \simeq \frac{6 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} + 0,0685 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ grad}^{-1} \times 283 \text{ K} \times \frac{-40 \text{ mb}}{1.010 \text{ mb}}}{0,2405 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ grad}^{-1}} = \underline{\underline{21,8 \text{ grad}}}$$

$$dU = \delta Q - p dV$$

$$dH = \delta Q + V dp$$

$$c_v = \frac{\delta Q_v}{dT} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_v$$

y

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

$$(\delta Q)_r = dU + p dV = c_v dT + p dV$$

Para introducir en (25) en vez de  $dv$ , la  $dp$ , que es directamente asequible a nuestras medidas, pongamos en ella

$$p dv = R dT - v dp$$

que resulta de diferenciar la ecuación de estado; obtendremos:

$$(\delta Q)_r = (c_v + R) dT - v dp \quad (25')$$

pero según (21), el calor específico a presión constante  $c_p$  del gas es

$$c_p = \frac{(\delta Q)_p}{dT} = \frac{[(c_v + R) dT - v dp]_p}{dT} = c_v + R \quad (26)$$

luego (25') puede escribirse

$$(\delta Q)_r = c_p dT - v dp \quad (27)$$

Calcular la variación de temperatura de una masa de aire si la presión disminuye instantáneamente el 2 por 100, sabiendo que su temperatura inicial era de 277 K.

$$dQ = c_p dT - v dp$$
$$dQ = c_v dT + p dv$$

Al ser la descompresión instantánea podemos suponer que el proceso es adiabático:

$$\delta Q = 0$$

Luego:

$$0 = C_p dT - V dp$$

O bien:

$$0 = C_p dT - RT \frac{dp}{p}$$

Despejando  $dT$  resulta:

$$dT = \frac{RT dp}{C_p p}$$

Pasando a diferencias finitas:

$$\Delta T \approx \frac{RT}{C_p} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

Y como:

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{2}{100}$$

resultará:

$$\Delta T = \frac{0,0685 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}}{0,2405 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}} \times 277 \text{ K} \frac{-\frac{2}{100} p}{p} = \underline{\underline{-1,6 \text{ grad}}}$$

## 1. ECUACIONES FUNDAMENTALES Y PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

La ecuación de estado de los gases perfectos está hoy día totalmente aceptada para describir los procesos del aire seco e incluso los del aire húmedo con las necesarias correcciones de  $R$  y  $T$ .

Luego:

$$\rho V = \frac{R^*}{M} \cdot T = R \cdot T \quad [1]$$

$V$ : volumen específico

$R^*$  (cte. universal de los gases) =  $8,31432 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{grado}^{-1}$

$M$  (masa molecular media del aire seco) =  $28,9644 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

De otra parte, la ecuación fundamental de la hidrostática muestra el cambio de presión en los movimientos verticales de una masa de aire, y su expresión es:

$$\left[ dp = - \frac{P'}{R \cdot T'} g \cdot dz \right] \quad [2]$$

donde  $P'$  y  $T'$  representan la presión y temperatura del ambiente. Ahora bien, por suponer procesos reversibles, resulta:

$$[P' = P]$$

Es decir, la presión de la partícula de aire y el ambiente se igualan y la ecuación hidrostática puede ponerse en la forma:

$$dp = - \frac{P}{RT} g dz = - \rho' \cdot g \cdot dz \quad [3]$$

$$dQ = c_p dT - v dp$$

$$dQ = c_v dT + p dv$$

Evoluciones  
adiabáticas  
reversibles



B) *Ecuaciones finitas de evolución.*—Para obtenerlas basta integrar las (25) y (27). Esto se consigue dividiendo por T, con lo cual toman la forma

$$dS = \frac{(\delta Q)_r}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (28)$$

$$dS = \frac{(\delta Q)_r}{T} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (29)$$

cuyos segundos miembros tienen las variables separadas.

Las cuadraturas son inmediatas para los *gases perfectos*, pues considerando constantes  $c_v$  y  $c_p$  resulta:

$$S - S_0 = c_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{v}{v_0} \quad (28')$$

$$S - S_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} \quad (29')$$

Caso particular importantísimo son las evoluciones adiabáticas reversibles. Sus ecuaciones diferenciales son las (25) y (27), igualando  $(\delta Q)_r$  a 0:

$$\begin{cases} c_v dT + p dv = 0 & (28'') \\ c_p dT - v dp = 0 & (29'') \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} c_v \frac{dT}{T} = -R \frac{dv}{v} & (28''') \\ c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p} & (29''') \end{cases}$$

En el caso de gases perfectos las fórmulas finitas de las adiabáticas son:

$$(30) \quad \frac{T}{T_0} = \left( \frac{v}{v_0} \right)^{-\frac{R}{c_v}} \quad \frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (31)$$

Para obtener la variación adiabática de  $p$  con  $v$ , igualamos los segundos miembros de (30) y (31)

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{v}{v_0} \right)^{-\frac{c_p}{c_v}} \quad (32)$$

Definamos los coeficientes  $\chi$  y  $\eta$  como

$$\chi = R^*/C_p = R/c_p; \quad \eta = C_p/C_v = c_p/c_v$$

Para el aire seco, que es una mezcla de gases diatómicos (si se desprecia una pequeña proporción de Ar, CO<sub>2</sub> y componentes secundarios) de proporción constante, se tienen los siguientes valores

$$\chi_a = 2/7 = 0,286; \quad \eta_a = 7/5 = 1,400$$

$$c_{v,a} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 171 \text{ cal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$c_{p,a} = 1.005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 240 \text{ cal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Las ecuaciones (30), (31) y (32) admiten las siguientes formas invariantes, obtenidas pasando a los segundos miembros los valores iniciales de las variables:

$$T v^{\frac{R}{c_v}} = \text{inv.} \quad (30'); \quad T p^{-\frac{R}{c_p}} = \text{inv.} \quad (31'); \quad p v^{\frac{c_p}{c_v}} = \text{inv.} \quad (32')$$

C) *Entalpia de los gases perfectos.*—Para los gases de Avogadro la entalpia  $W = U + p v$  es función sólo de la temperatura, ya que tanto  $U$  como  $p v$  dependen solo de la temperatura.

En particular, para los gases perfectos la entalpia vale precisamente:

$$W = U + p v = c_v T + RT = c_p T \quad (33)$$

## 2.7. Procesos adiabáticos en los gases ideales. Temperatura potencial

Partiendo de las ecuaciones (39) y (40) es fácil deducir para un proceso adiabático que en los gases ideales

$$\begin{aligned}\delta Q = 0 &= C_v dT + p dV = \\ &= C_p dT - V dp\end{aligned}\quad (50)$$

Dividiendo por  $T$  y sustituyendo la ecuación de estado de los gases se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}0 &= C_v d \ln T + R^* d \ln V \\ &= C_p d \ln T - R^* d \ln p \\ &= C_v d \ln p + C_p d \ln V\end{aligned}\quad (51)$$

La tercera de ellas resulta de cualquiera de las otras dos considerando que  $d \ln p + d \ln V = d \ln T$  y la ecuación (36). La integración de las tres ecuaciones conduce a

$$T^{C_v} V^{R^*} = \text{cte.}$$

$$T^{\chi} p^{-R^*} = \text{cte.}$$

$$p^{\eta} V^{\chi} = \text{cte.}$$

O también, sustituyendo los coeficientes  $\chi$  o  $\eta$ :

$$T V^{\eta-1} = \text{cte.}$$

$$T p^{-\chi} = \text{cte.}$$

$$p V^{\eta} = \text{cte.}$$

$$C_p - C_v = R^* \quad c_p - c_v = R$$

Una burbuja con una temperatura de 15°C y una presión de 1.010 mb asciende adiabáticamente hasta 700 mb. Determinar la temperatura de la burbuja en el nivel superior.

Como el proceso es adiabático resultará:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Luego:

$$T_1 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$T_1 = 288K \left(\frac{700}{1.010}\right)^{\frac{0,0685}{0,2405}} = 288 \left(\frac{700}{1.010}\right)^{0,2848} K = \underline{\underline{259,4 K}}$$

## 2. LA ENTROPIA EN LA ATMOSFERA

La expresión analítica del segundo principio de la Termodinámica es:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad [6]$$

Definición que, como indicamos, es válida únicamente para procesos reversibles.

La entropía específica, bajo la hipótesis de que el aire se comporta como un gas perfecto y para evoluciones reversibles, puede expresarse de la forma:

$$[S = C_p \ln T - R \ln p + k] \quad [7]$$

o también:

$$[S = C_v \ln T + R \ln V + k] \quad [8]$$

o, en función de  $p$  y  $V$ ,

$$[S = C_p \ln V + C_v \ln p + k] \quad [8 \text{ bis}]$$

**Problema 2.** Qué cantidad de calor es necesario para aumentar la temperatura del aire en 8° C manteniendo la presión constante.

$$dQ = c_p dT - v dp$$
$$dQ = c_v dT + p dv$$

Según el principio de Termodinámica, el calor absorbido por la unidad de masa en un proceso reversible

$$dQ = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp$$

Si la presión es constante  $dp = 0$ , quedando:

$$dQ = c_p dT$$

Por ser  $dT = 8^\circ \text{K}$

$c_p = 0,2405 \text{ calorías} \cdot \text{gr-masa}^{-1} \text{K}^{-1}$ , se tiene,

$$dQ = 0,2405 \times 8 = 1,9 \text{ calorías} \cdot \text{gr-masa}^{-1}$$

**Ecuación hidrostática:** Supone la atmósfera en equilibrio, y por tanto no hay aceleración ni intervienen la fuerza de Coriolis ni la de rozamiento, sólo la fuerza del gradiente de presión y la gravedad.

$$dp = -\rho g dz = -\frac{gdz}{v'}$$

**Gradiente adiabático seco:** Determina la variación de temperatura de una burbuja de aire al elevarse en la atmósfera de forma adiabática (sin intercambio de calor)

$$\delta Q = c_p dT - v dp$$

$$\delta Q = 0 \rightarrow c_p dT = v dp$$

$$c_p dT = -\frac{vgdz}{v'}$$

$$\gamma = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_{ps}}$$

**Problema 4.7** Obtenga la temperatura en función de la altitud en el modelo de atmósfera homogénea, en el que la densidad no depende de la altitud. Datos: Constante de los gases para el aire  $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

**Solución:**

Como la densidad es constante, podemos integrar directamente la ecuación hidrostática  $dp = -\rho g dz$  para obtener cómo varía la presión con la altitud

$$p(z) = p_0 - \rho_0 g z$$

entre  $z = 0$ , donde  $p(0) = p_0$ , y  $z$ .

Con la ayuda de la ecuación de los gases ideales

$$p = \rho R_d T$$

que nos da la relación entre  $T$  y  $p$  tenemos que

$$T = \frac{p}{\rho_0 R_d} = \frac{p_0 - \rho_0 g z}{\rho_0 R_d} = T_0 - \frac{g}{R_d} z,$$

donde hemos sustituido la temperatura al nivel del mar  $T_0 = p_0 / (\rho_0 R_d)$ . Esta es la ecuación de una recta cuya pendiente es igual al gradiente de temperatura  $\Gamma = g / R_d = 34 \text{ K km}^{-1}$ .

El aire húmedo es una mezcla de aire seco y vapor de agua.

Para cada temperatura, el aire húmedo admite una cantidad máxima de vapor de agua, alcanzando la saturación.

El vapor de agua es un gas y por tanto ejerce en el aire húmedo una determinada presión parcial o presión de vapor, cuyo valor máximo o saturante depende de la temperatura del aire húmedo.

Cuando la presión de vapor es saturante se produce teóricamente la condensación.

Su valor es menor sobre hielo que sobre agua

Temperature	esw(hPA)	esi (hPa)	esw - esi
-20 C	1.25	1.03	0.22
-10 C	2.86	2.60	0.26
0 C	6.11	6.11	0
10 C	12.27	n/a	
20 C	23.37	n/a	
30 C	42.45	n/a	
40 C	73.77	n/a	

## Índices de humedad

Humedad relativa

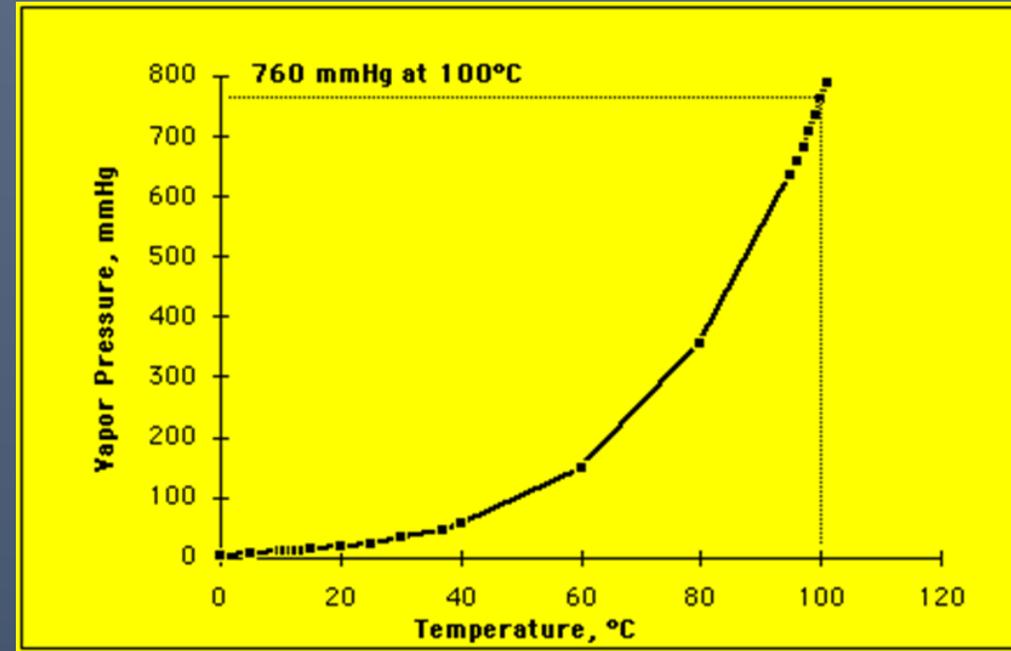
saturación

condensación



$$p_{vw} = 6.10 \times 10^{\frac{7.4475t}{234.07+t}} \text{ (mb)}$$

fórmula de Magnus (t en °C)



La humedad relativa indica lo lejos que se está de la saturación:

$$H_r = \frac{p_v}{p_{vw}(T)}$$

Formas de aumentar la  $H_r$ :



disminuyendo la temperatura

aumentando el contenido de vapor

## Ecuación de Clausius-Clapeyron

Sea un sistema termodinámico consistente en agua en **equilibrio** con su vapor  $\Rightarrow$  se condensa la misma cantidad de agua que se evapora  $\Rightarrow$  El vapor está saturado

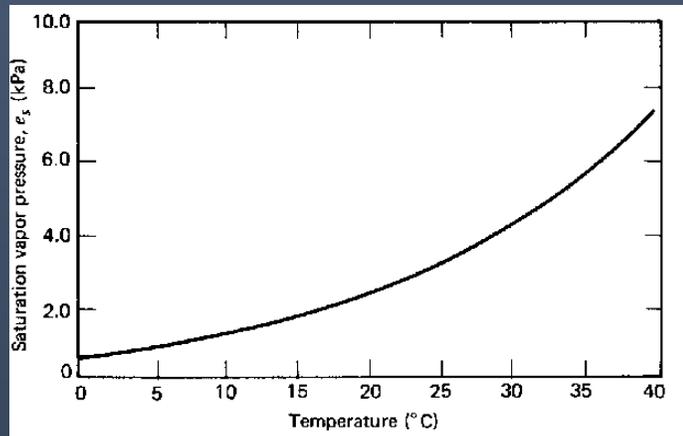
Aumentamos

T

El sistema reacciona evaporando agua  $\Rightarrow$  provoca un aumento de la presión de vapor. Las variaciones de la presión de vapor son función de las variaciones de temperatura de acuerdo con la relación:

$$\frac{dp_{vw}}{p_{vw}} = \frac{L_v}{R_v T^2} dT$$

## Ecuación de Clausius-Clapeyron



Para encontrar la expresión analítica de la presión de saturación se debe integrar numéricamente (debido a la dependencia del calor latente con la temperatura). La fórmula más sencilla se obtiene si se supone  $L_v$  constante:

$$p_{vw} = \exp\left(21.648 - \frac{5419.11}{T}\right) \quad (mb)$$

Sin embargo se utilizan más algunas fórmulas empíricas, tal como la de Magnus



$$p_{vw} = 6.10 \times 10^{\frac{7.4475t}{234.07+t}} \quad (mb)$$

# El aire húmedo



# Mezcla de gases ideales

$$R_a = \frac{R}{M_a} = \frac{8.31434 \text{ J / (molK)}}{28.965 \times 10^{-3} \text{ kg / mol}} = 287.05 \text{ J / (kgK)}$$

$$R_v = \frac{R}{M_v} = \frac{8.31434 \text{ J / (molK)}}{18 \times 10^{-3} \text{ kg / mol}} = 461.91 \text{ J / (kgK)}$$

Aire seco

Vapor de agua

+

$$p_a V = m_a R_a T$$

$$p_v V = m_v R_v T$$

$$p_a = \rho_a R_a T$$

$$p_v = \rho_v R_v T$$

De acuerdo con la ley de Dalton:

$$pV = (m_a R_a + m_v R_v) T = m \bar{R} T$$

Siendo:  $\rho = \rho_a + \rho_v$

$$\bar{R} = \frac{1}{m} (m_a R_a + m_v R_v)$$

$$p = \rho_h \bar{R} T$$

## Índices de humedad

Humedad absoluta:

(kg/m<sup>3</sup>)

densidad del vapor de agua  
(como si ocupase todo el volumen)

$$\rho_v = \frac{p_v}{R_v T}$$

Humedad específica

(kg/kg)

masa de vapor contenida en la unidad de masa de  
aire húmedo.

$$q_v = \frac{m_v}{m_h} = \frac{m_v}{m_a + m_v} = \frac{\rho_v}{\rho_a + \rho_v}$$

$$\rho_v = \frac{p_v}{R_v T}$$

Multiplicando numerador  
y denominador por  $R_a$

$$q_v = \frac{p_v / R_v}{(p_a / R_a) + (p_v / R_v)} = \epsilon \frac{p_v}{p_a + \epsilon p_v}$$

$$\epsilon = R_a / R_v = 0.622$$

$$q_v \approx \epsilon \frac{p_v}{p_a} \approx \epsilon \frac{p_v}{p}$$

## Índices de humedad

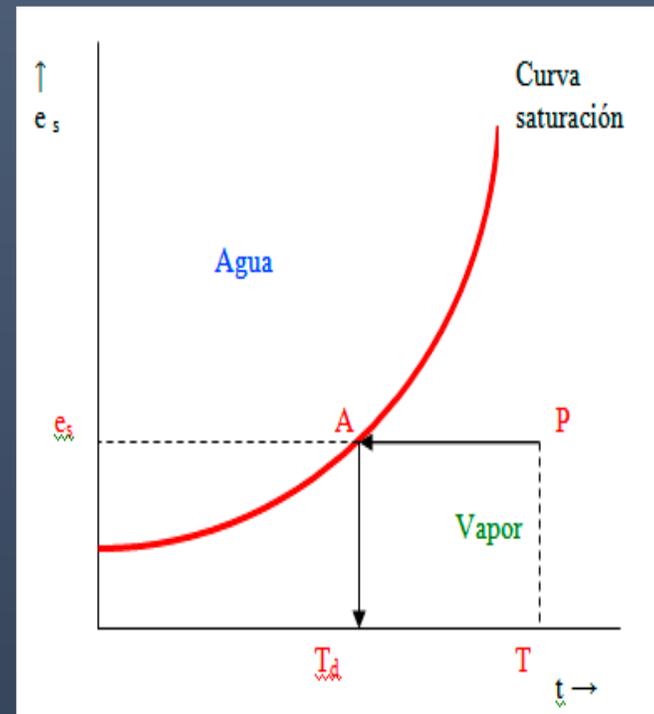
### Temperatura de rocío

Si se enfría el aire a presión total constante (*enfriamiento isobárico*), la temperatura para la cuál se alcanza la saturación se denomina temperatura de punto de rocío.

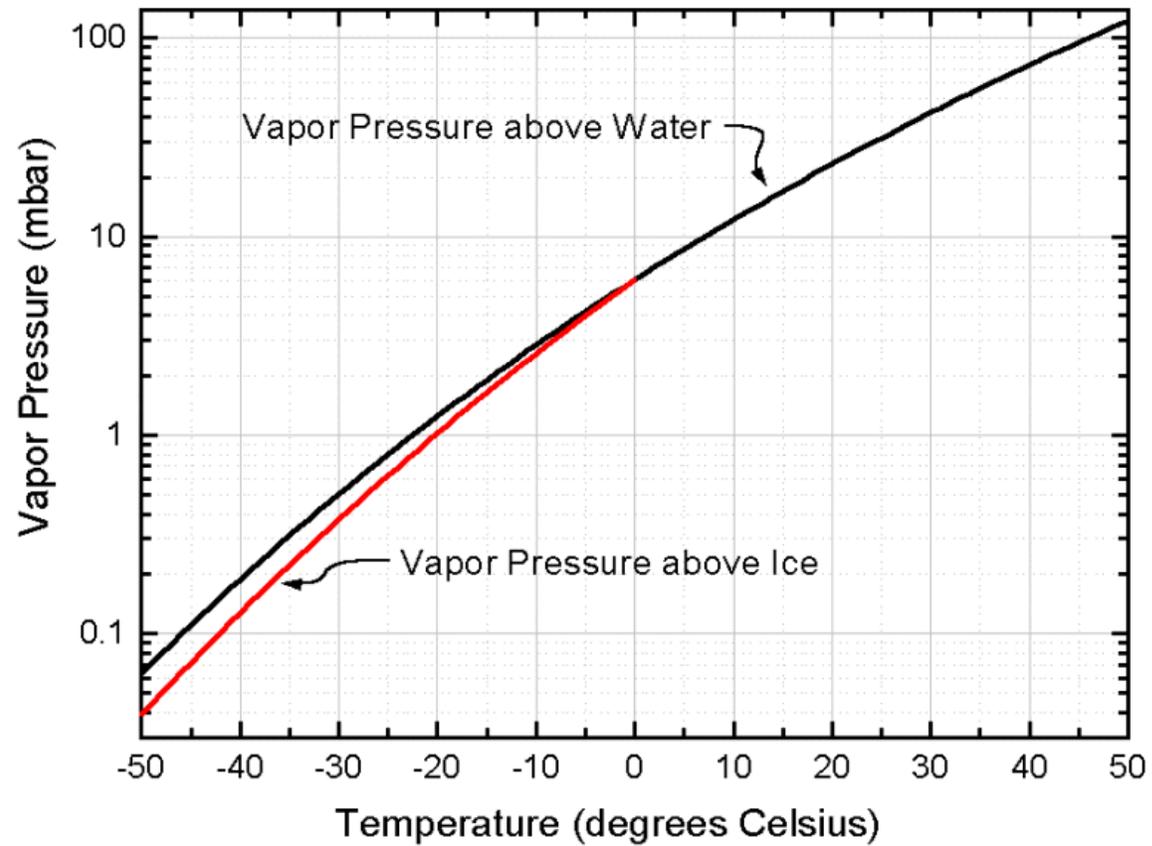
$$p_v = p_{vw}(T_d)$$

Por tanto

$$H_r = \frac{p_v}{p_{vw}(T)} = \frac{p_{vw}(T_d)}{p_{vw}(T)}$$



# Presión de vapor saturante



## Concepto de temperatura virtual

$$\varepsilon = R/R' = 0,622 = 5/8$$

Temperatura a la cual se debe poner una muestra de aire seco para que, en las mismas condiciones de presión, tenga la **misma densidad del aire húmedo**.

$$\bar{R} = R(1 - q) + R'q = R\left(1 - q + \frac{8}{5}q\right) = R\left(1 + \frac{3}{5}q\right)$$

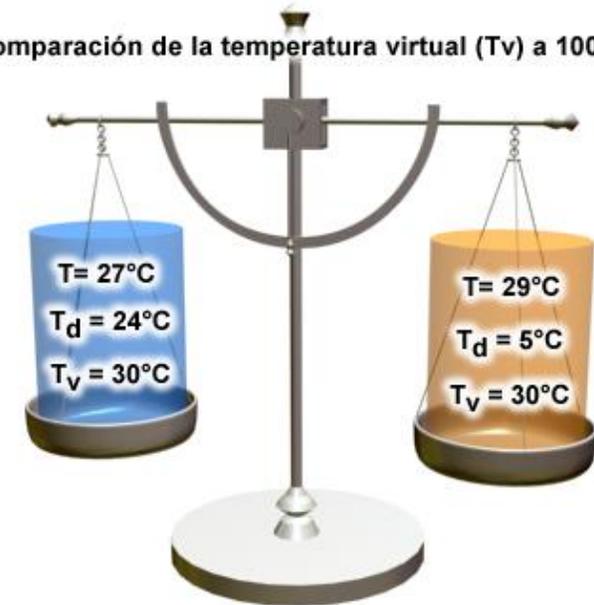
$$\bar{R}T = RT_v$$

luego, según (77), página 98

$$T_v = \frac{\bar{R}}{R}T = \left(1 + \frac{3}{5}q\right) \cdot T$$

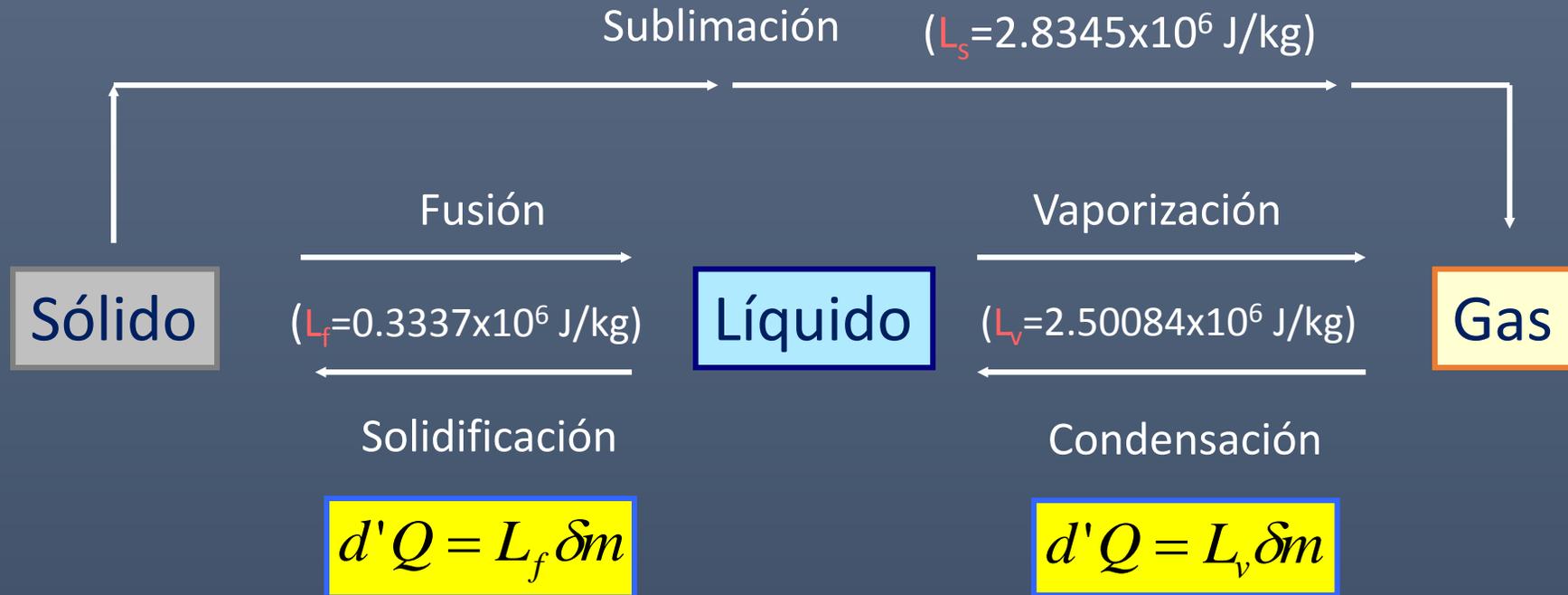
$$T_v = (1 + 0.61q_v)T$$

Comparación de la temperatura virtual ( $T_v$ ) a 1000 hPa



# Cambios de estado

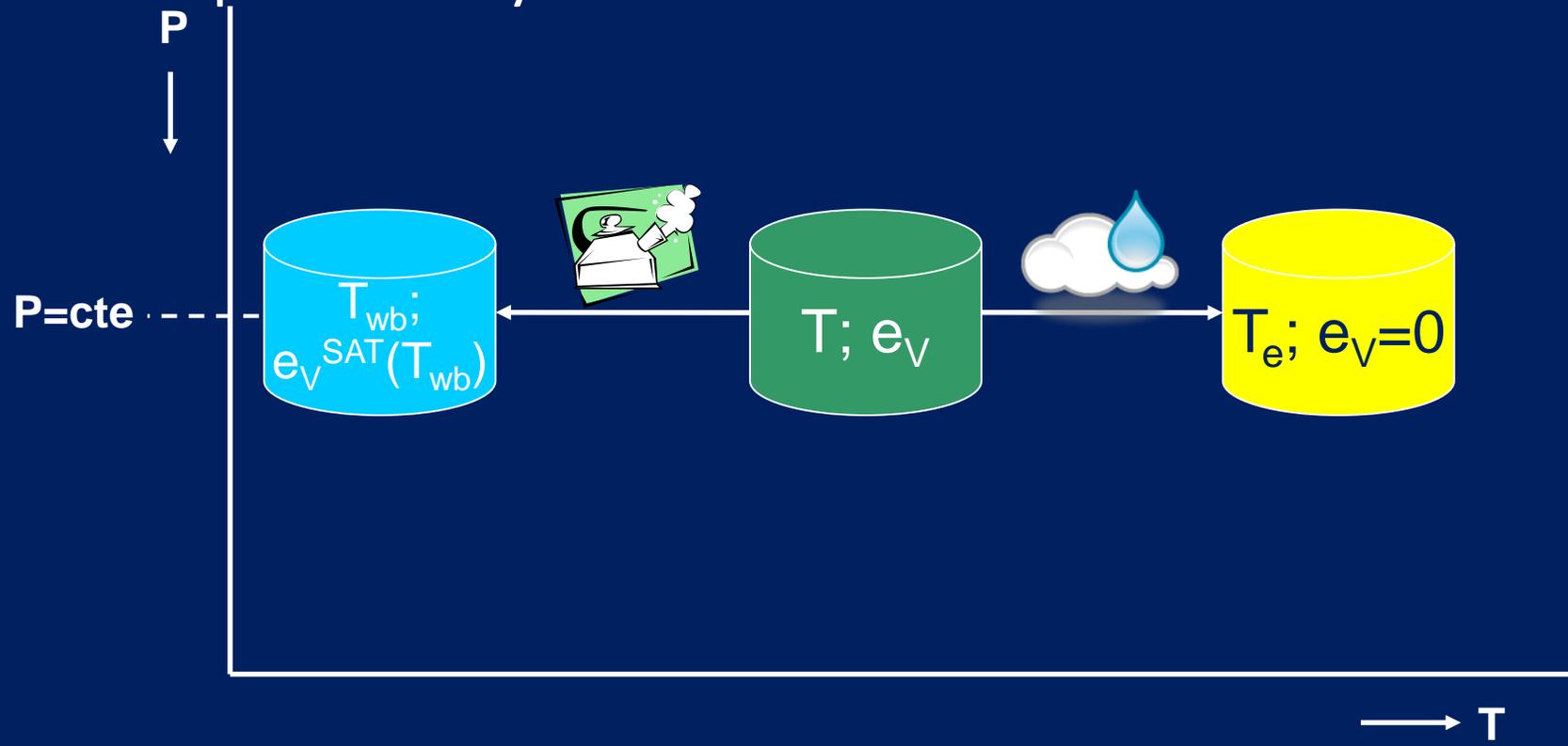
A T=cte



La temperatura equivalente,  $T_e$  o temperatura equivalente adiabática es la temperatura que alcanzaría la partícula de aire húmedo si todo el contenido de vapor que tiene condensara y el calor latente de condensación calentara la muestra de aire.

La temperatura del termómetro húmedo  $T_w$  es la temperatura a la que llega una partícula de aire que se enfría a presión constante debido a la evaporación del agua en su seno

## • Temperaturas equivalente y de termómetro húmedo



$$\gamma = -\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\delta Q=0} = \frac{g}{C_p} = \frac{1}{102} K/m$$

$$\Gamma = -\left(\frac{dT}{dz}\right)_{saturado}$$

$$\Gamma = \gamma \frac{p + \left(\frac{\varepsilon L}{R_a T} - 1\right) \cdot E}{p + \left[\frac{R_a}{C_{pa}} \left(\frac{\varepsilon L}{R_a T}\right)^2 - 1\right] \cdot E} \quad (11)$$

con  $p$  presión del aire,  $L$  calor latente de condensación,  $R_a$  y  $C_{pa}$  constante del aire seco y calor específico a presión constante,  $T$  temperatura del aire,  $E$  tensión de vapor saturante y  $\varepsilon$  la razón entre  $R_a$  y  $R_v$ .

### Resumen:

- La evolución del aire húmedo en un ascenso es la misma que la del aire seco siempre que se encuentre lejos de la saturación.
- En el momento que se alcanza la saturación, en la evolución del aire húmedo se produce condensación del vapor.
- La condensación del vapor libera calor latente que mitiga el enfriamiento del aire, por lo que el enfriamiento del aire húmedo saturado es menor que el del aire seco.

Curva de Estado o perfil térmico vertical de la atmósfera

$$\alpha = -\partial T / \partial z$$

Gradiente adiabático seco

$$\gamma = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \cong 9.8^\circ \text{C} / \text{km}$$

Gradiente pseudoadiabático saturado

$$\Gamma = -\frac{dT}{dz} = \gamma \frac{P + \varepsilon \frac{LE}{RT}}{P + \varepsilon \frac{L}{C_p} \frac{dE}{dT}}$$